Лекция № 6

Задача линейного программирования (ЗЛП)

Постановка канонической задачи:

Решается задача: $f(X)=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i=1..m<n \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j=1..n$$

Постановка основной задачи:

Решается задача: $f(X)=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge) b_i, \qquad i=1..m \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j=1..n$$

Постановка общей задачи:

Решается задача: $f(X)=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i=1..k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge) b_i, \qquad i=k+1..m \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j=1..n$$

Общая характеристика поставленных задач

1. Решается задача поиска максимума целевой функции.
2. Максимизируемая функция и ограничения линейны по x_j
3. Задачи содержат ограничения на знак переменных x_j. Если по физической постановке какая-либо переменная, является не ограниченной по знаку, ее всегда можно представить в виде:

$$x_j = x_{n+1} - x_{n+2}, \text{ где } x_{n+1} \ge 0,\ x_{n+2} \ge 0$$

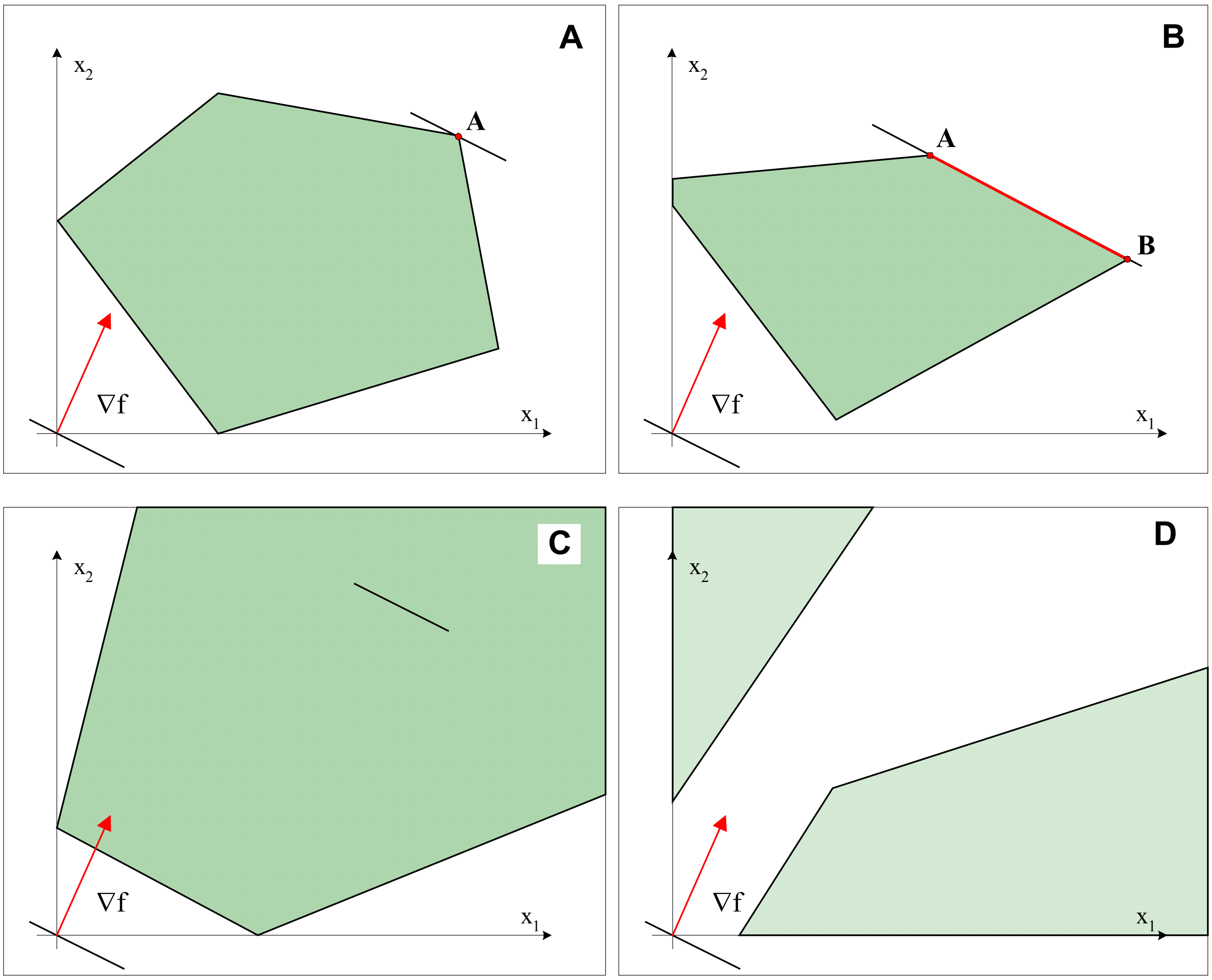
В случае двух переменных, поставленные задачи могут быть решены графически.

Алгоритм графического решения задачи

1. Построить множество допустимых решений, задаваемое ограничениями.
2. Построить градиент целевой функции в точке с координатами $(0,0)$.
3. Построить линию уровня целевой функции, проходящую через точку с координатами $(0,0)$.

4. Если требуется найти максимум целевой функции, мысленно переносить построенную линию уровня функции в направлении градиента до последнего касания с множеством допустимых решений. Точка касания - максимум.
Если требуется найти минимум целевой функции, мысленно переносить построенную линию уровня функции в направлении градиента до первого касания с множеством допустимых решений. Точка касания - минимум.

При графическом решении задачи возможны следующие варианты:

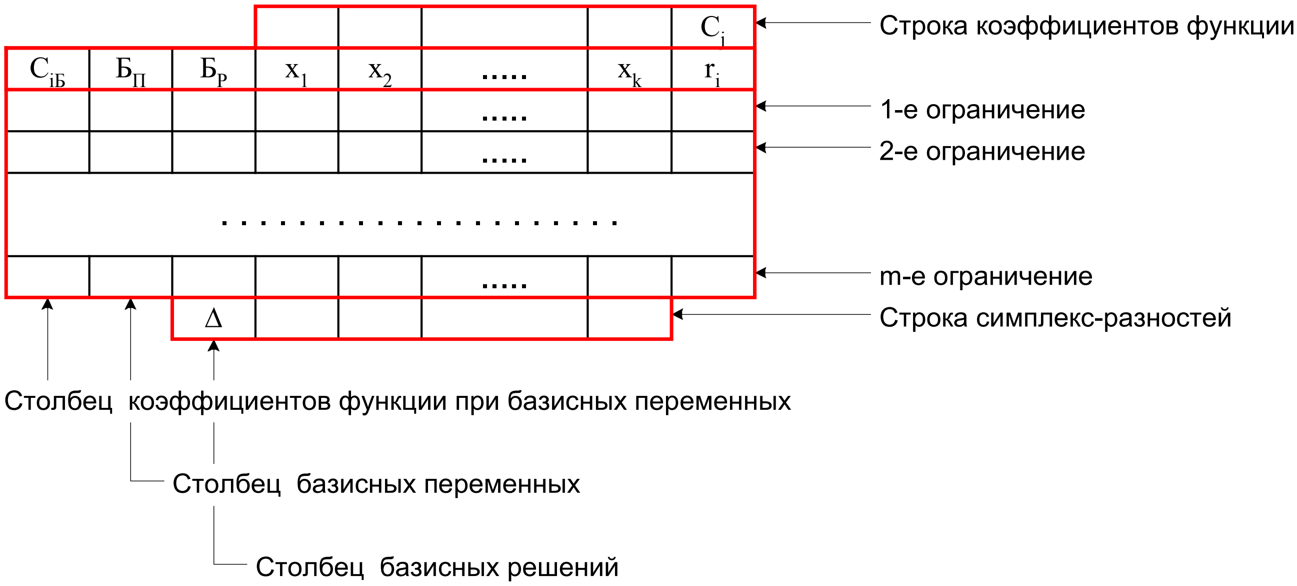


В случае **A** – решение единственное (точка A)
В случае **B** – бесконечное множество решений (на отрезке $[A, B]$)
В случае **C** – решение нет, так как область допустимых решений в направлении поиска решения незамкнута
В случае **D** – решений нет, так как ограничения в задаче несовместны.

Табличный симплекс метод Данцига

Решение задач на основании стратегии симплекс метода наглядно представляется в виде таблиц специального вида.

Вид симплекс-таблицы



<u>Алгоритм симплекс-метода</u>

Замечание №1. При решении задачи симплексметодом ограничения на знак переменных не участвуют ни в подготовке задачи к решению, ни в самом счете.

Решение задачи симплекс методом включает два этапа: этап подготовки задачи к решению и этап вычислений.

Этап подготовки задачи к решению

1. Симплекс-метод ищет максимум функции. Если требуется найти минимум, умножить целевую функцию на (-1) и перейти к задаче поиска максимума.

2. Правые части ограничений должны быть ≥ 0. Если правая часть ограничения < 0, умножить его левую и правую части на (-1) и изменить знак ограничения на противоположный.

3. Привести задачу к каноническому виду - перейти от задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств, вводя, если это необходимо, дополнительные переменные. Ввести дополнительные переменные в целевую функцию с коэффициентами равными 0.

4. Выписать столбцы коэффициентов при переменных в ограничениях. Если среди выписанных столбцов имеется m (по числу ограничений) базисных столбцов - столбцов единичной матрицы размерности $m \times m$, перейти к п. 6.

5. Если нужное число базисных столбцов не найдено перейти к решению М-задачи:
   5.1.дописать недостающие столбцы искусственно;
   5.2.поставить им в соответствие искусственные переменные;
   5.3.переписать ограничения с учетом искусственных переменных;
   5.4.ввести искусственные переменные в целевую функцию с коэффициентами равными $(-M)$, где M - большое положительное число.

6. Выписать переменные при базисных столбцах - эти переменные базисные. Записать начальное базисное решение: базисные переменные равны правым частям ограничений, в которые они входят, все остальные переменные равны 0.

Этап вычислений

Алгоритм

1. Составить таблицу №1.

2. Выписать базисное решение. Вычислить симплекс-разности для небазисных переменных по формуле:

$$\Delta_j = C_j - C_{iБ} \cdot A_j$$

Переменная, которой соответствует в столбце максимальная положительная симплекс-разность, вводится в базис. Соответствующий столбец пометим – Z.

3. Высчитать величины r_i по формуле: $r_i = \dfrac{Б_{p_i}}{Z_i}$.

Переменная, которой соответствует в строке минимальная неотрицательная величина r_i, выводится из базиса. Соответствующую строку пометим - Z. Элемент, стоящий на пересечении Z-столбца и Z -строки – *разрешающий элемент* - R.

4. Построить новую таблицу, пересчитав предыдущую.

Пересчет таблицы

4.1. Заполнить в новой таблице: строку коэффициентов функции, столбец $Б_п$ и столбец $C_{iБ}$.

4.2. Пересчитать Z-строку, содержащую разрешающий элемент и записать в новую таблицу под тем же номером: **новая строка = старая строка / R**
Полученная строка – *разрешающая*.

4.3. Пересчитать все остальные строки таблицы и записать их под теми же номерами в новую таблицу:

новая строка K = старая строка K – (разрешающая строка) * Коэффициент Пересчета,

здесь Коэффициент пересчета – элемент, стоящий на пересечении строки K и Z-столбца в старой таблице.

5. Повторить процедуру 2-4 до тех пор, пока все симплекс-разности не станут $\le$ 0, тогда последнее базисное решение есть решение задачи.

Замечание №2. Если в процессе решения оказалось, что в базис вводится некоторая переменная (существует симплекс-разность > 0), а среди величин r_i нет ни одной неотрицательной, значит, задача не имеет решения вследствие не замкнутости области допустимых решений.

Замечание №3. Если в таблице, соответствующей решению задачи, в строке симплекс-разностей содержится 0 больше, чем число ограничений в задаче, значит, задача имеет бесконечное множество решений, одно из которых найдено.

Замечание №4. Если при решении М-задачи найдено решение (все симплекс-разности $\le$ 0), но в составе базисных переменных сталась искусственная переменная не равная 0, то исходная задача не имеет решения вследствие несовместности ограничений.