Лекция № 7

Численное интегрирование дифференциальных уравнений

Поиск общего решения ДУ возможен только для достаточно узкого класса ДУ: это некоторые виды ДУ 1-го порядка, ЛОДУ и ЛНДУ с постоянными коэффициентами и некоторые другие ДУ, решение которых может быть сведено к решению ДУ 1-го порядка.

При решении практических задач поиск общего решения ДУ как правило невозможен, поэтому решение задачи интегрирования ДУ ограничивается поиском так называемых частных решений, удовлетворяющих определенным условиям: задачи Коши и краевые задачи.

Постановка задачи численного интегрирования ДУ 1-го порядка

Дано: $y' = f(x, y)$ - ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной,

$y(x_0) = y_0$ - начальное условие,

здесь x_0 - начальная точка, y_0 - значение функции в начальной точке.

Требуется: Решить поставленную задачу Коши – найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Метод Эйлера

Выбрав достаточно малый шаг h, построим систему равноотстоящих точек: $x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0,1,2,..$

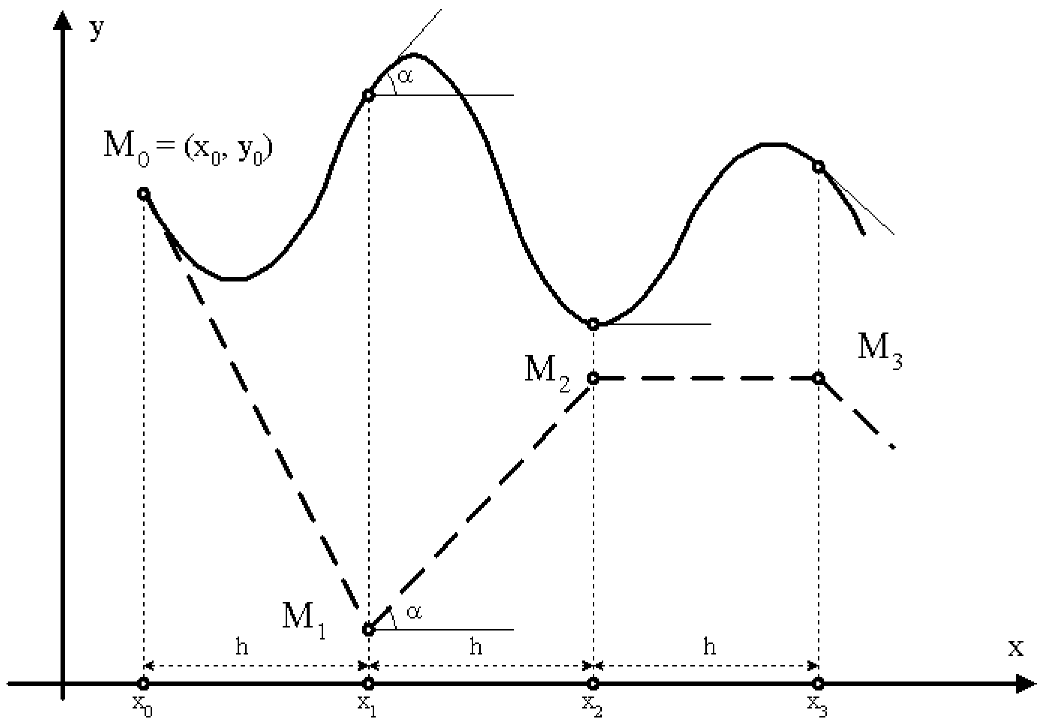
Искомое решение (интегральную кривую) $y = y(x)$, проходящую через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$, приближенно заменим ломанной $M_0, M_1, M_2.....$, звенья которой в каждой вершине имеют направление, совпадающее с направлением интегральной кривой. Тогда

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(x_i) \quad \Rightarrow \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad \Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Окончательно имеем вычислительную схему для метода Эйлера:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \end{aligned}}$$

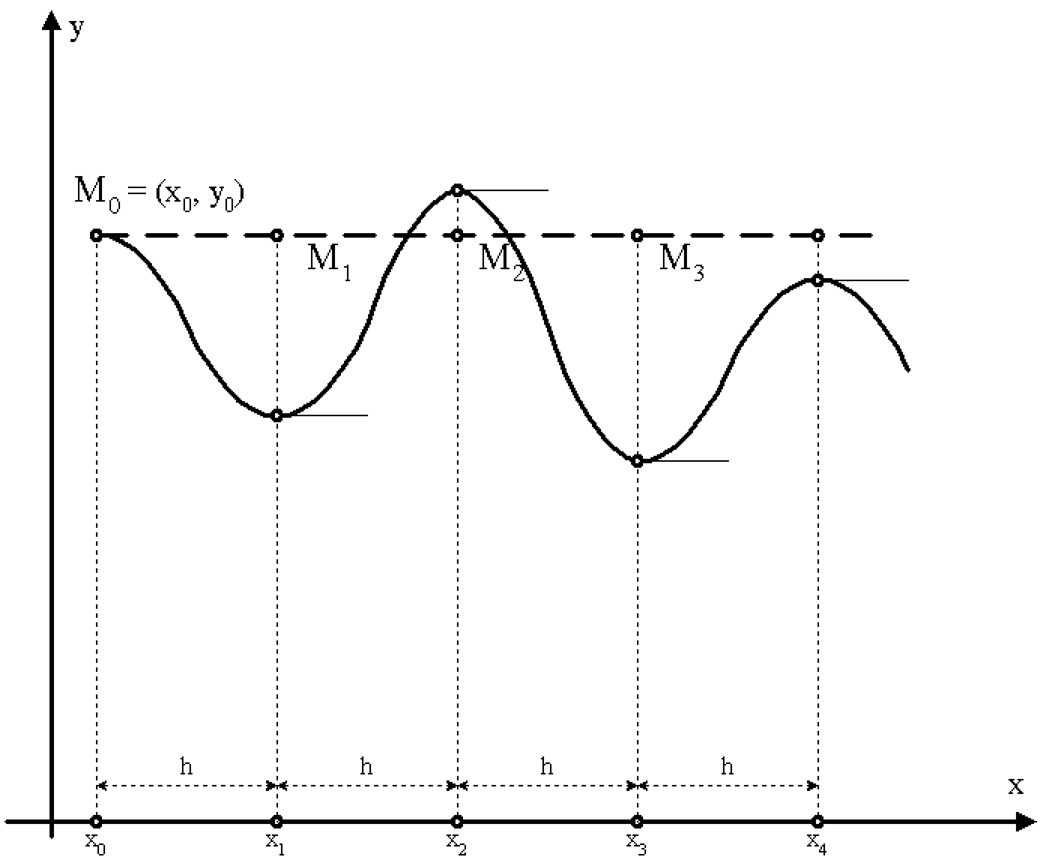
Геометрическая интерпретация метода Эйлера представлена на рисунке:



Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Его недостатками являются:

1) малая точность;
2) систематическое накопление ошибок.

Недостатки метода Эйлера можно проиллюстрировать следующим примером.



Как видно из рисунка, при неудачном выборе шага h, метод Эйлера заменяет интегральную кривую прямой.

Метод Эйлера дает сравнительно удовлетворительные результаты (в смысле погрешности) лишь при малых значениях h, поскольку, по существу метод Эйлера заключается в том, что интеграл дифференциального уравнения на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представляется двумя членами ряда Тейлора:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i), \quad i = 0,1,2....,$$

т.е. для этого отрезка имеется погрешность порядка h^2.

Модификации метода Эйлера

Более усовершенствованным является метод Эйлера с пересчетом, при котором сначала вычисляют промежуточные значения:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$$

и находят значение направления поля интегральных кривых в средней точке:

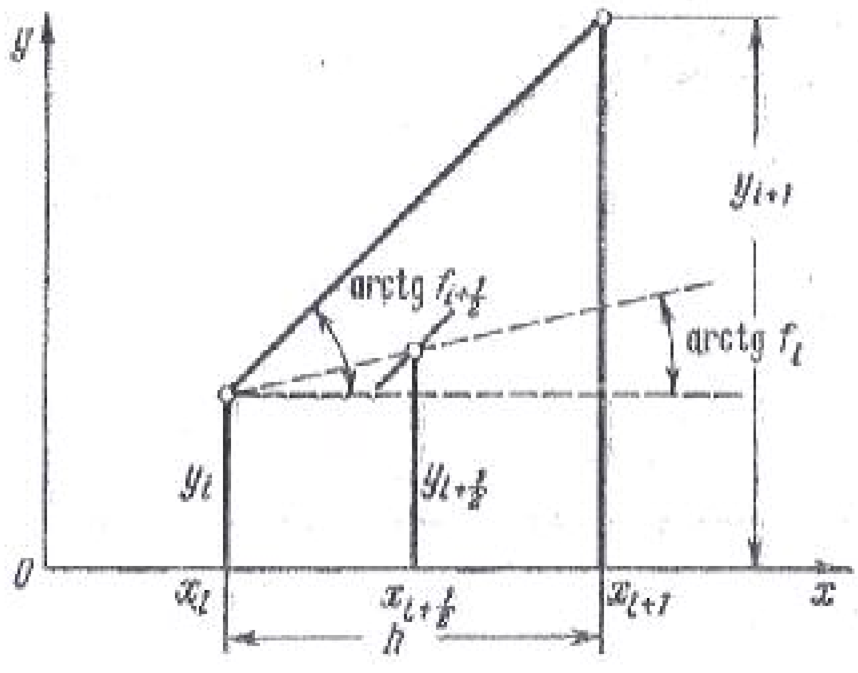
$$f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}),$$

Затем полагают:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_{i+\frac{1}{2}}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера представлена на рисунке:



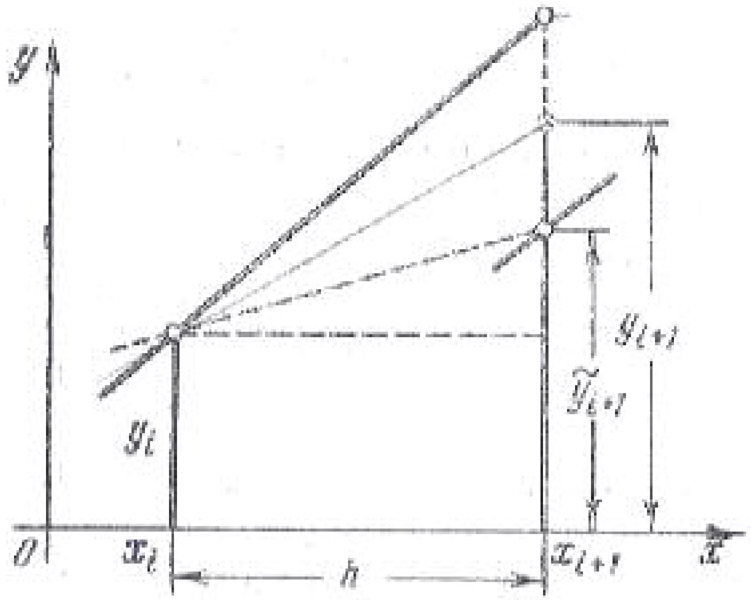
Другой модификацией метода является метод Эйлера-Коши, при котором сначала определяют «грубое приближение» решения: $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, yY_i)$, исходя из которого находится направление поля интегральных кривых $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$.

Затем приближенно полагают:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{(f(x_i, y_i) + \tilde{f}_{i+1})}{2}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера представлена на рисунке:



Погрешность модификаций метода Эйлера на каждом шаге есть величина порядка h^3.

Метод Рунге-Кутта

Согласно методу последовательные значения искомоц функции определяются по формуле:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \cdot (k_1^{(i)} + 2 \cdot k_2^{(i)} + 2 \cdot k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_2^{(i)} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2})$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}) \qquad k_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$$

Можно доказать, что погрешность этого метода на каждом шаге есть величина порядка h^5.

Метод Рунге-Кутта обладает значительной точностью, и, несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении дифференциальных уравнений с помощью вычислительной техники.