

Решение примеров к лекции № 6

Пример №2. Решить СЛОДУ методом Эйлера

Дано:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Замечание.

В первую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x , а затем y из первого уравнения системы.
Во вторую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x , а затем y из второго уравнения системы.

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) - 3 \cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы, решив уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16$$

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} = 5$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, действительные.

3.

Запишем матрицу $A - \lambda_1 E$, где $\lambda_1 = 1$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2 - 1 & 3 \\ 1 & 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_1 из уравнения:

$$(A - \lambda_1 E) \cdot V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:

Пусть $v_2 = 1$, тогда из первого уравнения системы $v_1 = -3v_2 = -3$.

Окончательно:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу $A - \lambda_2 E$, где $\lambda_2 = 5$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 1 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A - \lambda_2 E) \cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:

Пусть $v_2 = 1$, тогда из второго уравнения системы $v_1 = v_2 = 1$.

Окончательно:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Запишем решение системы в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{1t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

Проверка:

Из решения: $\dot{x} = -3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$ и $\dot{y} = C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$

Подставим выражения для x , y , \dot{x} в первое уравнение исходной системы:

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = 2(-3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t}) + 3(C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t})$$

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = -6C_1 \cdot e^t + 2C_2 \cdot e^{5t} + 3C_1 \cdot e^t + 3C_2 \cdot e^{5t}$$

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} \equiv -3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x , y , \dot{y} во второе уравнение исходной системы:

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = (-3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t}) + 4(C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t})$$

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} + 4C_1 \cdot e^t + 4C_2 \cdot e^{5t}$$

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} \equiv C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$$

получено верное тождество

Ответ:
$$\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^{1t} + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^{1t} + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

Пример №3. Решить СЛОДУ методом Эйлера

Дано:
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (1-\lambda) - 3 \cdot (-3) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы, решив уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 10 = -36$$

$$\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{-36}}{2} = 1 - 3i \quad \lambda_2 = \frac{2 + \sqrt{-36}}{2} = 1 + 3i$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, комплексно-сопряженные.

3. Т.к. корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 простые, комплексно-сопряженные, выберем любой из них, например $\lambda_2 = 1 + 3i$

Запишем матрицу $A - \lambda_2 E$, где $\lambda_2 = 1 + 3i$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 - 1 - 3i & -3 \\ 3 & 1 - 1 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A - \lambda_2 E) \cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3i \cdot v_1 - 3v_2 = 0 \\ 3v_1 - 3i \cdot v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:

Пусть $v_2 = 1$, тогда из второго уравнения системы $v_1 = v_2 \cdot i = i$.

Окончательно:

$$V_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произведение:

$$P = V_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(1+3i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot [\cos(3t) + i \cdot \sin(3t)] \cdot e^t = \begin{pmatrix} i \cdot \cos(3t) + i^2 \cdot \sin(3t) \\ \cos(3t) + i \cdot \sin(3t) \end{pmatrix} \cdot e^t =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(3t) + i \cdot \cos(3t) \\ \cos(3t) + i \cdot \sin(3t) \end{pmatrix} \cdot e^t$$

Окончательно:

$$P = \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} \cdot e^t + i \cdot \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \cdot e^t$$

4. Запишем решение системы в векторной форме в виде линейной комбинации действительной и мнимой частей полученного произведения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \cdot e^t$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = -C_1 \sin(3t) \cdot e^t + C_2 \cos(3t) \cdot e^t \\ y = C_1 \cos(3t) \cdot e^t + C_2 \sin(3t) \cdot e^t \end{cases}$$

Проверка:

Из решения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3C_1 \cos(3t) \cdot e^t - C_1 \sin(3t) \cdot e^t - 3C_2 \sin(3t) \cdot e^t + C_2 \cos(3t) \cdot e^t = \\ &= (-3C_1 + C_2) \cos(3t) + (-C_1 - 3C_2) \sin(3t) \\ \dot{y} &= -3C_1 \sin(3t) \cdot e^t + C_1 \cos(3t) \cdot e^t + 3C_2 \cos(3t) \cdot e^t + C_2 \cdot \sin(3t) \cdot e^t = \\ &= (C_1 + 3C_2) \cos(3t) + (-3C_1 + C_2) \sin(3t) \end{aligned}$$

Подставим выражения для x , y , \dot{x} в первое уравнение исходной системы:

$$\begin{aligned} (-3C_1 + C_2) \cos(3t) \cdot e^t + (-C_1 - 3C_2) \sin(3t) \cdot e^t &= \\ = -C_1 \sin(3t) \cdot e^t + C_2 \cos(3t) \cdot e^t - 3(C_1 \cos(3t) \cdot e^t + C_2 \sin(3t) \cdot e^t) \end{aligned}$$

$$(-3C_1 + C_2) \cos(3t) + (-C_1 - 3C_2) \sin(3t) = -C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t) - 3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t)$$

$$\underline{(-3C_1 + C_2) \cos(3t) + (-C_1 - 3C_2) \sin(3t) \equiv (-3C_1 + C_2) \cos(3t) + (-C_1 - 3C_2) \sin(3t)}$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x , y , \dot{y} во второе уравнение исходной системы:

$$\begin{aligned} (C_1 + 3C_2) \cos(3t) \cdot e^t + (-3C_1 + C_2) \sin(3t) \cdot e^t &= \\ = -3C_1 \sin(3t) \cdot e^t + 3C_2 \cos(3t) \cdot e^t + C_1 \cos(3t) \cdot e^t + C_2 \sin(3t) \cdot e^t \end{aligned}$$

$$\underline{(C_1 + 3C_2) \cos(3t) + (-3C_1 + C_2) \sin(3t) \equiv (C_1 + 3C_2) \cos(3t) + (-3C_1 + C_2) \sin(3t)}$$

получено верное тождество

Ответ:
$$\begin{cases} x = -C_1 \sin(3t) \cdot e^t + C_2 \cos(3t) \cdot e^t \\ y = C_1 \cos(3t) \cdot e^t + C_2 \sin(3t) \cdot e^t \end{cases}$$

Пример №4. Решить СЛОДУ методом Эйлера

Дано:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) - 1 \cdot (-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы, решив уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 9 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{0}}{2} = 3 \qquad \lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{0}}{2} = 3$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – кратные, действительные.

3.

Запишем матрицу $A - \lambda_1 E$, где $\lambda_1 = 3$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2 - 3 & 1 \\ -1 & 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для данной матрицы найдется только один линейно-независимый собственный вектор, поэтому будем искать решение СЛОДУ в виде:

$$x = (a + b \cdot t) \cdot e^{3t}$$

$$y = (c + d \cdot t) \cdot e^{3t}$$

Тогда:

$$x = a \cdot e^{3t} + b \cdot t \cdot e^{3t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 3a \cdot e^{3t} + b \cdot (e^{3t} + 3t \cdot e^{3t})$$

$$y = c \cdot e^{3t} + d \cdot t \cdot e^{3t} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = 3c \cdot e^{3t} + d \cdot (e^{3t} + 3t \cdot e^{3t})$$

Подставим полученные выражения в первое уравнение системы:

$$\underbrace{3a \cdot e^{3t} + b \cdot (e^{3t} + 3t \cdot e^{3t})}_x = 2 \cdot \underbrace{(a \cdot e^{3t} + b \cdot t \cdot e^{3t})}_x + \underbrace{(c \cdot e^{3t} + d \cdot t \cdot e^{3t})}_y$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой и правой частях уравнения:

$$(3a + b) \cdot e^{3t} + 3b \cdot t \cdot e^{3t} = (2a + c) \cdot e^{3t} + (2b + d) \cdot t \cdot e^{3t}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях переменной t в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases} 3a + b = 2a + c \\ 3b = 2b + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = c \\ b = d \end{cases}$$

Подставим полученные выражения во второе уравнение системы:

$$\underbrace{3c \cdot e^{3t} + d \cdot (e^{3t} + 3t \cdot e^{3t})}_y = 4 \cdot \underbrace{(c \cdot e^{3t} + d \cdot t \cdot e^{3t})}_y - \underbrace{(a \cdot e^{3t} + b \cdot t \cdot e^{3t})}_x$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой и правой частях уравнения:

$$(3c + d) \cdot e^{3t} + 3d \cdot t \cdot e^{3t} = (4c - a) \cdot e^{3t} + (4d - b) \cdot t \cdot e^{3t}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях переменной t в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases} 3c + d = 4c - a \\ 3d = 4d - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d = c \\ b = d \end{cases}$$

Объединим соотношения для отыскания коэффициентов:

$$\begin{cases} a + b = c \\ b = d \\ a + d = c \\ b = d \end{cases}$$

Очевидно, что в данной системе совпадают уравнения 2-е и 4-е, а также 1-е и 3-е при условии, что $b = d$.

Для нахождения решения введем произвольные постоянные: $a = C_1$ и $b = C_2$.

Тогда: $c = C_1 + C_2$ (из первого уравнения)

$d = C_2$ (из второго уравнения)

4. Окончательно:

$$x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t}$$

$$y = (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t}$$

Проверка:

Из решения: $\dot{x} = 3C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot (e^{3t} + 3t \cdot e^{3t})$ и $\dot{y} = 3(C_1 + C_2) \cdot e^{3t} + C_2 \cdot (e^{3t} + 3t \cdot e^{3t})$

Подставим выражения для x , y , \dot{x} в первое уравнение исходной системы:

$$3C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot (e^{3t} + 3t \cdot e^{3t}) = 2 \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} + (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t}$$

$$3C_1 + C_2 + 3C_2 \cdot t = 2C_1 + 2C_2 \cdot t + C_1 + C_2 + C_2 \cdot t$$

$$3C_1 + C_2 + 3C_2 \cdot t \equiv 3C_1 + C_2 + 3C_2 \cdot t$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x , y , \dot{y} во второе уравнение исходной системы:

$$3(C_1 + C_2) \cdot e^{3t} + C_2 \cdot (e^{3t} + 3t \cdot e^{3t}) = 4 \cdot (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} - (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t}$$

$$3C_1 + 4C_2 + 3C_2 \cdot t = 4C_1 + 4C_2 + 4C_2 \cdot t - C_1 - C_2 \cdot t$$

$$3C_1 + 4C_2 + 3C_2 \cdot t \equiv 3C_1 + 4C_2 + 3C_2 \cdot t$$

получено верное тождество

Ответ:
$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \end{cases}$$