Решение примеров к лекции №5

Пример №1. Решить ЛОДУ

Дано: $y'' + y' - 2y = 0$

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

   Это квадратное уравнение, вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a = 1$, $b = 1$ и $c = -2$.

2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

   $\lambda_1 = -2$ - простой действительный корень

   $\lambda_2 = 1$ - простой действительный корень

Получим: $y = C_1 \cdot e^{-2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{1 \cdot x}$

Для корня $\lambda_1 = -2$

Для корня $\lambda_2 = 1$

Ответ: $\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}}$

Пример №2. Решить ЛОДУ

Дано: $4y'' + 4y' + y = 0$

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение: $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$

2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{4 \cdot 2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ - кратный действительный корень

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ - кратный действительный корень

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений) $k = 2$.

Получим: $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$

Для корней $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Ответ: $\boxed{y = (C_1 + C_2 x)e^{-1/2x}}$

Пример №3. Решить ЛОДУ

<u>Дано:</u> $y'' + 4y' + 5y = 0$
<u>Решение:</u>

1. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = 16 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 2 \cdot i}{2} = -2 \pm i \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -2 + i \\ \lambda_2 = -2 - i \end{matrix}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$\lambda_1 = -2 + i$ - комплексно-сопряженный простой корень, действительная часть $\alpha = -2$, мнимая $\beta = 1$

$\lambda_2 = -2 - i$ - комплексно-сопряженный простой корень, действительная часть $\alpha = -2$, мнимая $\beta = 1$

Получим: $y = C_1 \cos(1 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x} + C_2 \sin(1 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x}$

Для корней
$\lambda_1 = -2 + i$ и $\lambda_2 = -2 - i$

Ответ: $\boxed{y = C_1 \cos x \cdot e^{-2x} + C_2 \sin x \cdot e^{-2x}}$

Пример №4. Решить ЛОДУ

<u>Дано:</u> $y^{(6)} + 18y^{(4)} + 81y'' = 0$

<u>Решение:</u>

1. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^6 + 18\lambda^4 + 81\lambda^2 = 0$

2. Решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2(\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81) = 0$$

$\lambda^2 = 0$ и $\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$

Решаем $\lambda^2 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0} = 0}$

Решаем $\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$ - биквадратное уравнение

Замена: $\lambda^2 = t$, получим $t^2 + 18 \cdot t + 81 = 0$ - квадратное уравнение

$$t_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 81}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{0}}{2} = -9$$

Получили: $t_1 = \lambda^2 = -9$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i}$

$t_2 = \lambda^2 = -9$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_{5,6} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i}$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$\lambda_1 = 0$ - действительный корень

$\lambda_2 = 0$ - действительный корень

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений) $k = 2$.

$\lambda_3 = 3i$ - комплексно-сопряженный корень, действительная часть $\alpha = 0$, мнимая $\beta = 3$

$\lambda_5 = 3i$ - комплексно-сопряженный корень, действительная часть $\alpha = 0$, мнимая $\beta = 3$

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений) $k = 2$.

$\lambda_4 = -3i$ - комплексно-сопряженный корень, действительная часть $\alpha = 0$, мнимая $\beta = 3$

$\lambda_6 = -3i$ - комплексно-сопряженный корень, действительная часть $\alpha = 0$, мнимая $\beta = 3$

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений) $k = 2$.

Получим:

$$y = (C_1x + C_2) \cdot e^{0 \cdot x} + (C_3 + C_4x) \cdot \cos(3 \cdot x) \cdot e^{0 \cdot x} + (C_5 + C_6x) \cdot \sin(3 \cdot x) \cdot e^{0 \cdot x}$$

Для корней $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$

Для корней $\lambda_3 = 3i$ и $\lambda_3 = 3i$

Для корней $\lambda_4 = -3i$ и $\lambda_6 = -3i$

Ответ: $\boxed{y = C_1x + C_2 + (C_3 + C_4x) \cdot \cos(3x) + (C_5 + C_6x) \cdot \sin(3x)}$

Пример №5. Решить ЛНДУ методом вариации произвольной постоянной

Дано: $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

Решение:

1. Решаем ЛОДУ с той же левой частью: $y'' + 2y' + y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$
$$y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-x}$$
$$y_{\text{одн}} = C_1 \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)} + C_2 \cdot \underbrace{x \cdot e^{-x}}_{y_2(x)}$$

2. Заменим в полученном решении произвольные постоянные на неизвестные функции:

$$y = C_1(x) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)} + C_2(x) \cdot \underbrace{x \cdot e^{-x}}_{y_2(x)}$$

3. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot x \cdot e^{-x} = 0 \\ C_1' \cdot (e^{-x})' + C_2' \cdot (x \cdot e^{-x})' = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

4. Решаем систему:

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot x \cdot e^{-x} = 0 \\ -C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot (e^{-x} - x \cdot e^{-x}) = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' \cdot x = 0 \\ -C_1' + C_2' \cdot (1 - x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Из первого уравнения: $C_1' = -x \cdot C_2'$

Подставим во второе уравнение:

$$x \cdot C_2' + C_2' - x \cdot C_2' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2' = \frac{1}{x}}, \text{ тогда } \boxed{C_1' = -1}$$

4. Найдем неизвестные функции:

$$C_1(x) = \int -1 dx = -x + \hat{C}_1 \qquad C_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \hat{C}_2$$

5. Подставим в решение из п. 2:

$$y = (-x + \hat{C}_1) \cdot e^{-x} + (\ln|x| + \hat{C}_2) \cdot x \cdot e^{-x}$$
$$y = \underbrace{\hat{C}_1 \cdot e^{-x} + \hat{C}_2 \cdot x \cdot e^{-x}}_{\text{решение ЛОДУ}} \underbrace{- x \cdot e^{-x} + \ln|x| \cdot x \cdot e^{-x}}_{\text{частное решение}} \text{ - решение ЛНДУ}$$

Ответ: $\boxed{y = (-x + C_1) \cdot e^{-x} + (\ln|x| + C_2) \cdot x \cdot e^{-x}}$

Пример №6. Решить ЛНДУ методом вариации произвольной постоянной

Дано: $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$

Решение:

1. Решаем ЛОДУ с той же левой частью: $y'' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\,i \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -2\,i \\ \lambda_2 = 2\,i \end{array}$$

$$y_{одн} = C_1 \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{y_1(x)} + C_2 \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{y_2(x)}$$

2. Заменим в полученном решении произвольные постоянные на неизвестные функции:

$$y = C_1(x) \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{y_1(x)} + C_2(x) \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{y_2(x)}$$

3. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1{}' \cdot \cos(2x) + C_2{}' \cdot \sin(2x) = 0 \\ C_1{}' \cdot (\cos(2x))' + C_2{}' \cdot (\sin(2x))' = \dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases}$$

4. Решаем систему:

$$\begin{cases} C_1{}' \cdot \cos(2x) + C_2{}' \cdot \sin(2x) = 0 \\ -2C_1{}' \cdot \sin(2x) + 2C_2{}' \cdot \cos(2x) = \dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases}$$

Из первого уравнения: $C_1{}' = \dfrac{-C_2{}' \sin(2x)}{\cos(2x)}$

Подставим во второе уравнение: $\dfrac{2C_2{}' \cdot \sin^2(2x)}{\cos(2x)} + 2C_2{}' \cos(2x) = \dfrac{1}{\sin(2x)} \quad \Rightarrow$

$$\frac{2C_2{}' \cdot \sin^2(2x) + 2C_2{}' \cos^2(2x)}{\cos(2x)} = \frac{1}{\sin(2x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2C_2{}'}{\cos(2x)} = \frac{1}{\sin(2x)} \quad \Rightarrow$$

$\boxed{C_2{}' = \operatorname{ctg}(2x)}$, тогда $\boxed{C_1{}' = -1}$

4. Найдем неизвестные функции:

$$C_1(x) = \int -1dx = -x + \hat{C}_1 \qquad C_2(x) = \int \operatorname{ctg}(2x)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\sin(2x)\right| + \hat{C}_2$$

5. Подставим в решение из п. 2:

$$y = (-x + \hat{C}_1) \cdot \cos(2x) + (0.5 \cdot \ln\left|\sin(2x)\right| + \hat{C}_2) \cdot \sin(2x)$$

$y = \underbrace{\hat{C}_1 \cdot \cos(2x) + \hat{C}_2 \cdot \sin(2x)}_{\text{решение ЛОДУ}} \underbrace{- x \cdot \cos(2x) + 0.5 \cdot \ln\left|\sin(2x)\right| \cdot \sin(2x)}_{\text{частное решение}}$ - решение ЛНДУ

Ответ: $\boxed{y = (-x + \hat{C}_1) \cdot \cos(2x) + (0.5 \cdot \ln\left|\sin(2x)\right| + \hat{C}_2) \cdot \sin(2x)}$

Пример №7. Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения

Дано: $y^{IV} + 4y'' = 5x + e^{2x}$

Решение:

1) Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y^{IV} + 4y'' = 0$$
$$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$$
$$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_{3,4} = \pm 2i$$
$$y_{одн} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$$

2) Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$5x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$
2 слагаемое:	e^{2x}	$\alpha = 2 \quad \beta = 0 \quad m = 0$

3) Так как α и β у слагаемых разные, то группировки нет, каждое слагаемое – отдельная группа.

1 слагаемое:	$5x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$	1 группа
2 слагаемое:	e^{2x}	$\alpha = 2 \quad \beta = 0 \quad m = 0$	2 группа

4) Для каждой группы слагаемых записываем частное решение:

Первое частное решение: $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$

$$y_{част1} = x^S \cdot (b_0 + b_1 x) \cdot e^{0\cdot x}$$
$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad S = 2$$

Окончательно: $\boxed{y_{част1} = x^2 \cdot (b_0 + b_1 x) \cdot e^{0\cdot x}}$

Второе частное решение: $\alpha = 2 \quad \beta = 0 \quad m = 0$

$$y_{част2} = x^S \cdot (b_2) \cdot e^{2\cdot x}$$
$$\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 0 = 2 \quad \rightarrow \quad S = 0$$

Окончательно: $\boxed{y_{част2} = (b_2) \cdot e^{2\cdot x}}$

6) Записываем структуру общего решения ЛНДУ:

$$y = y_{одн} + y_{част1} + y_{част2}$$

Ответ: $\boxed{y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x) + x^2 \cdot (b_0 + b_1 x) + b_2 \cdot e^{2x}}$

Пример №8. Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения

Дано: $y'' + 4y = \cos(2x) + 4x^2 - 3x \cdot \sin(2x)$

Решение:

1) Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{одн} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

2) Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$\cos(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 0$
2 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$
3 слагаемое:	$-3x \cdot \sin(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$

3) Группируем слагаемые с одинаковыми парметрами α и β:

1 и 3 слагаемое:	$\cos(2x)$ $-3x \cdot \sin(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$	1 группа
2 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$	2 группа

4) Для каждой группы слагаемых записываем частное решение:

Первое частное решение: $\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$

$$y_{част1} = x^S \cdot [(b_0 + b_1 x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3 x) \cdot \sin(2x)] \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 2 = 2i \quad \rightarrow \quad S = 1$$

Окончательно: $\boxed{y_{част1} = x \cdot [(b_0 + b_1 x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3 x) \cdot \sin(2x)]}$

Второе частное решение: $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$

$$y_{част2} = x^S \cdot (b_4 + b_5 x + b_6 x^2) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad S = 0$$

Окончательно: $\boxed{y_{част2} = b_4 + b_5 x + b_6 x^2}$

6) Записываем структуру общего решения ЛНДУ:

$$y = y_{одн} + y_{част1} + y_{част2}$$

Ответ:

$$\boxed{y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + x \cdot [(b_0 + b_1 x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3 x) \cdot \sin(2x)] + b_4 + b_5 x + b_6 x^2}$$

Пример №9. Решить ЛНДУ методом подбора частного решения

<u>Дано:</u> $y'' + 4y = 4x^2 - x$

<u>Решение:</u>

1) Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

2) Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$
2 слагаемое:	$-x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$

3) Группируем слагаемые с одинаковыми парметрами α и β:

1 и 2 слагаемое:	$4x^2$ $-x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$	1 группа

4) Для полученной группы слагаемых записываем частное решение:

<u>Частное решение:</u> $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$

$$y_{\text{част}} = x^S \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \cdot e^{0\cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad S = 0$$

Окончательно: $\boxed{y_{\text{част}} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$

5) Находим неизвестные коэффициенты частного решения методом неопределенных коэффициентов:

$$y_{\text{част}} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$y'_{\text{част}} = b_1 + 2 \cdot b_2 x$$

$$y''_{\text{част}} = 2 \cdot b_2$$

$$y''_{\text{част}} + 4y_{\text{част}} = 4x^2 - x$$

$$2 \cdot b_2 + 4 \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = 4x^2 - x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения:

x^0	$2 \cdot b_2 + 4 \cdot b_0 = 0$
x	$4 \cdot b_1 = -1$
x^2	$4 \cdot b_2 = 4$

Из полученной системы находим:

$$b_0 = -\tfrac{1}{2}$$

$$b_1 = -\tfrac{1}{4}$$

$$b_2 = 1$$

Окончательно: $\boxed{y_{част} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2}$

<u>Проверка:</u>

$$y_{част} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2$$

$$y'_{част} = -\frac{1}{4} + 2\cdot x$$

$$y''_{част} = 2$$

$$y''_{част} + 4y_{част} = 4x^2 - x$$

$$2 + 4\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2\right) = 4x^2 - x$$

$$2 - 2 - x + 4x^2 = 4x^2 - x$$

$$\underline{4x^2 - x \equiv 4x^2 - x}$$

6) Записываем решение ЛНДУ:

$$y = y_{одн} + y_{част1}$$

Ответ: $\boxed{y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2}$