

Решение примеров к лекции № 4

Пример №2. Решить ДУ высшего порядка

Дано: $(x^2 + 1)y'' = 2x \cdot y'$

Решение:

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, не содержащим y .

Используем замены: $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$.

Получим:

$$(x^2 + 1)z' = 2x \cdot z - \text{ДУ 1-го порядка.}$$

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$$z' = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot z - \text{это ДУ с разделяющимися переменными.}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot z$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln(x^2 + 1) + \ln C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\underline{z = C_1(x^2 + 1)} - \text{решение ДУ 1-го порядка}$$

3. Сделаем обратную замену: $y' = C_1(x^2 + 1)$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1 :

$C_1 = 0$	$C_1 \neq 0$
$y' = 0$	$y' = C_1 x^2 + C_1$
$\underline{y = C}$	$y = \int (C_1 x^2 + C_1) dx$
	$\underline{y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2}$

4. Проанализируем полученные решения.

В результате получены два решения ДУ $y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$ и $y = C$, но при $C_1 = 0$ решение $y = C$

является частным случаем решения $y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$, поэтому выпишем только одно решение:

$$\underline{y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2.}$$

5. Потеряных решений нет (проверить самостоятельно).

6. Ответ: $\boxed{y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2}$

Пример №3. Решить ДУ высшего порядка

Дано: $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$

Решение:

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, не содержащим x .

Используем замены: $y' = p(y)$, тогда $y'' = p' \cdot p$.

Получим:

$$p^2 + 2y \cdot p' = 0 - \text{ДУ 1-го порядка.}$$

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$$p' = \frac{-1}{2y} \cdot p - \text{это ДУ с разделяющимися переменными.}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{-1}{2y} \cdot p$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = -\frac{1}{2} \ln|y| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln \frac{1}{\sqrt{y}} + \ln C_1 \quad \Rightarrow$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}} - \text{решение ДУ 1-го порядка}$$

3. Сделаем обратную замену: $y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1 :

$C_1 = 0$	$C_1 \neq 0$
$y' = 0$ $y = C$	$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \int \sqrt{y} dy = \int C_1 dx$ $\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2$

4. В результате получены два решения ДУ: $\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2$ и $y = C$ и ни одно из них не является частным случаем другого.

5. Потеряных решений нет (проверить самостоятельно).

6. Ответ: $\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2, \quad y = C$

Пример №4. Решить ДУ высшего порядка

Дано: $x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 = y \cdot y'$

Решение:

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка содержит x и y .

Проверяем на однородность: $x \cdot (ky) \cdot (ky'') - x \cdot (ky')^2 = ky \cdot ky'$ - каждое слагаемое в ДУ содержит k^2 , сократив на которое ($k \neq 0$), получим исходное ДУ.

Используем замены: $y' = z(x) \cdot y$, тогда $y'' = z' \cdot y + z^2 \cdot y$

Получим:

$$x \cdot y \cdot (z' \cdot y + z^2 \cdot y) - x \cdot (z \cdot y)^2 = y \cdot z \cdot y$$

$$x \cdot z' \cdot y^2 + x \cdot z^2 \cdot y^2 - x \cdot z^2 \cdot y^2 = y^2 \cdot z$$

$$x \cdot z' + x \cdot z^2 - x \cdot z^2 = z$$

$$x \cdot z' = z \text{ - ДУ 1-го порядка}$$

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$$z' = \frac{1}{x} \cdot z \text{ - это ДУ с разделяющимися переменными.}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot z$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow \underline{z = C_1 x} \text{ - решение ДУ 1-го порядка}$$

3. Сделаем обратную замену: $\frac{y'}{y} = C_1 x \Rightarrow y' = C_1 x \cdot y$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1 :

$C_1 = 0$	$C_1 \neq 0$
$y' = 0$ $\underline{y = C}$	$y' = C_1 x \cdot y$ $\frac{dy}{dx} = C_1 x \cdot y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int C_1 x dx$ $\underline{\ln y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2}$

4. В результате получены два решения ДУ: $\underline{\ln|y| = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2}$ и $\underline{y = C}$ и ни одно из них не является частным случаем другого.

5. Потеряных решений нет (проверить самостоятельно).

6. Ответ: $\boxed{\ln|y| = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2, \quad y = C}$

Пример №5. Решить задачу Коши для ДУ 2-го порядка

Дано: $(x^2 + 1)y'' = 2x \cdot y'$

$$y(1) = 1$$

$$y'(1) = 2$$

Решение:

1. Решаем ДУ (см. пример №2).

Общее решение ДУ имеет вид: $y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$

2. Дифференцируем общее решение один раз:

$$y' = C_1 x^2 + C_1$$

3. Записываем вместе общее решение и найденную производную:

$$y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$$y' = C_1 x^2 + C_1$$

4. Подставляем заданные начальные условия в выписанные функции:

Условие $y(1) = 1$ означает, что при $x = 1$ функция $y = 1$, значит $1 = C_1 \frac{1^3}{3} + C_1 \cdot 1 + C_2$

Условие $y'(1) = 2$ означает, что при $x = 1$ функция $y' = 2$, значит $2 = C_1 \cdot 1^2 + C_1$

Получили:
$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{3}C_1 + C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 + C_1 \end{cases}$$

5. Решаем систему:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{3}C_1 + C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{4}{3}C_1 + C_2 \\ 2 = 2C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

6. Подставим найденные значения в общее решение: $y = 1 \cdot \frac{x^3}{3} + 1 \cdot x - \frac{1}{3}$ - решение задачи Коши

Ответ: $y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}$