

Решение примеров к лекциям № 2 и №3

Пример №1. Решить ДУ с разделяющимися переменными

Дано: $x \cdot y + (x + 1)y' = 0$

Решение:

1. Выразим из ДУ старшую производную: $y' = \frac{-x \cdot y}{x + 1}$

В правой части ДУ можно выделить два множителя, один представляет функцию аргумента x , другой аргумента y :

$$y' = \underbrace{\frac{-x}{x+1}}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{y}_{\psi(y)} \text{ - это ДУ с разделяющимися переменными в виде *}$$

2. Сделаем замену: $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{x+1} \cdot y$

3. Разделим переменные: $\frac{dy}{y} = \frac{-x}{x+1} \cdot dx$

4. Проинтегрируем левую часть уравнения по y , правую по x :

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{-x}{x+1} \cdot dx && \Rightarrow \quad \ln|y| = -\int \frac{x+1-1}{x+1} \cdot dx \\ \Rightarrow \quad \ln|y| &= -\int \frac{x+1}{x+1} \cdot dx - \int \frac{-1}{x+1} \cdot dx && \Rightarrow \quad \ln|y| = -\int 1 \cdot dx + \int \frac{1}{x+1} \cdot d(x+1) \\ \Rightarrow \quad \ln|y| &= -x + \ln|x+1| + C \text{ - решение ДУ} \end{aligned}$$

Преобразуем полученное решение:

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -x + \ln|x+1| + \ln C \\ \Rightarrow \quad e^{\ln|y|} &= e^{-x + \ln|x+1| + \ln C} && \Rightarrow \quad y = e^{-x} \cdot e^{\ln|x+1|} \cdot e^{\ln C} \\ \Rightarrow \quad \boxed{y = e^{-x} \cdot (x+1) \cdot C} &&& \text{- решение ДУ} \end{aligned}$$

5. Проанализируем возможно потерянные решения. Для этого выпишем все выражения, на которые осуществлялось деление в процессе решения, приравняем их нулю и проверим соответствующие функции подстановкой в исходное ДУ:

а) $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Проверим функцию $x = -1$, подставляем ее в ДУ:

$$-1 \cdot y + (-1 + 1)y' = 0 \quad \Rightarrow \quad -y + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -y = 0$$

В полученном выражении левая часть не равна правой (не тождество), значит $x = -1$ - не решение ДУ.

б) $y = 0$. Проверим функцию $y = 0$, подставляем ее в ДУ:

$$x \cdot 0 + (x + 1) \cdot 0' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Получили: левая часть равна правой (тождество), значит $y = 0$ - решение ДУ, но это решение входит в ранее найденное как частный случай при $C = 0$

6. Ответ: $\boxed{y = e^{-x} \cdot (x + 1) \cdot C}$

Пример №2. Решить ДУ с разделяющимися переменными

Дано: $\sqrt{y^2 + 1} \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$

Решение:

1. Используя формулу $y' = \frac{dy}{dx}$, выделим в ДУ старшую производную: $\sqrt{y^2 + 1} = x \cdot y \cdot y'$.

Выразим из ДУ старшую производную: $y' = \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{x \cdot y}$

В правой части ДУ можно выделить два множителя, один представляет функцию аргумента x , другой аргумента y :

$$y' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y}}_{\psi(y)}$$

- это ДУ с разделяющимися переменными в виде *

2. Сделаем замену: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y}$

3. Разделим переменные: $\frac{y \cdot dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{1}{x} dx$

4. Проинтегрируем левую часть уравнения по y , правую по x :

$$\int \frac{y \cdot dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \int \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(y^2 + 1)}{\sqrt{y^2 + 1}} = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{y^2 + 1} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{y^2 + 1} = \ln|x| + C} \text{ - решение ДУ}$$

5. Проанализируем возможно потерянные решения. Для этого выпишем все выражения, на которые осуществлялось деление в процессе решения, приравняем их нулю и проверим соответствующие функции подстановкой в исходное ДУ:

а) $x = 0$. Проверим функцию $x = 0$, подставляем ее в ДУ:

$$\sqrt{y^2 + 1} \cdot d0 = 0 \cdot y \cdot dy \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

В полученном выражении левая часть равна правой (тождество), значит $\boxed{x = 0}$ - решение ДУ и это решение не входит в найденное ни при каком значении произвольной постоянной.

б) $y = 0$. Проверим функцию $y = 0$, подставляем ее в ДУ:

$$\sqrt{0^2 + 1} \cdot dx = x \cdot 0 \cdot d0 \quad \Rightarrow \quad dx = 0 \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Получили: левая часть не равна правой (не тождество), значит $y = 0$ - не решение ДУ.

в) $\sqrt{y^2 + 1} = 0$ не имеет смысла ни при каких действительных значениях y , здесь нет решений.

6. Ответ: $\boxed{\sqrt{y^2 + 1} = \ln|x| + C, \quad x = 0}$

Пример №3. Решить однородное ДУ 1-го порядка

Дано: $\frac{y'}{y} = \frac{\ln y - \ln x}{x}$

Решение:

1. Выразим из ДУ старшую производную: $y' = \frac{y}{x} \cdot (\ln y - \ln x)$

Правая часть полученного уравнения представляет собой функцию аргумента $\frac{y}{x}$:

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \underbrace{\ln \frac{y}{x}}_{f\left(\frac{y}{x}\right)} - \text{это однородное ДУ 1-го порядка}$$

2. Сделаем замену: $z = \frac{y}{x}$, $y' = z' \cdot x + z$

3. Получим:

$$z' \cdot x + z = z \cdot \ln z$$

$$z' = \frac{1}{x} \cdot (z \cdot \ln z - z) - \text{ДУ с разделяющимися переменными}$$

4. Решаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot (z \cdot \ln z - z)$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} = \ln|x|$$

$$\ln|\ln z - 1| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln|\ln z - 1| = \ln|x| \cdot C$$

$$\ln z - 1 = C \cdot x$$

$$\ln z = C \cdot x + 1 - \text{решение ДУ с разделяющимися переменными}$$

5. Сделаем обратную подстановку:

$$\ln \frac{y}{x} = C \cdot x + 1 - \text{решение однородного ДУ}$$

6. Потерянных решений нет (проверить самостоятельно!).

7. Ответ: $\ln \frac{y}{x} = C \cdot x + 1$

Пример №4. Решить линейное ДУ 1-го порядка методом вариации произвольной постояннойДано: $x \cdot y' - 2y = 2x^4$ Решение:1. Выразим старшую производную: $y' = 2 \frac{y}{x} + 2x^3$ Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x)$, где $a(x) = \frac{2}{x}$, $b(x) = 2x^3$, значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка.2. Запишем соответствующее линейное однородное ДУ (ЛОДУ): $y' = 2 \frac{y}{x}$ - это ДУ является ДУ с разделяющимися переменными.

3. Решаем ЛОДУ:

$$y' = 2 \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2 \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2 \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \underline{y = C \cdot x^2} \text{ - решение ЛОДУ}$$

4. Заменяем произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$$y = C(x) \cdot x^2$$

5. Найдем производную найденного решения: $y' = C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x$

Подставим найденные выражения в ДУ из п.1:

$$\underbrace{C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x}_{y'} = \frac{2}{x} \cdot \underbrace{C(x) \cdot x^2}_y + 2x^3$$

$$C'(x) \cdot x^2 + \underline{2x \cdot C(x)} = \underline{2x \cdot C(x)} + 2x^3$$

$$C'(x) \cdot x^2 = 2x^3$$

Замечание! Если все сделано правильно, то при подстановке из ДУ исчезает $C(x)$!

$$C'(x) = 2x$$

6. Найдем функцию $C(x)$: $C(x) = \int 2x \, dx = x^2 + \hat{C}$ 7. Подставим найденное выражение в решение из п.4: $\boxed{y = (x^2 + \hat{C}) \cdot x^2}$ - решение линейного ДУ.

8. Потерянных решений нет (проверить самостоятельно).

9. Ответ: $\boxed{y = (x^2 + C) \cdot x^2}$

Пример №5. Решить линейное ДУ 1-го порядка методом вариации произвольной постояннойДано: $y \cdot dx = (x + y^2)dy$ Решение:1. Выделим в ДУ производную y' : $y = (x + y^2)y'$ Выразим старшую производную: $y' = \frac{y}{x + y^2}$ - это ДУ не является линейным.

$$\text{Преобразуем ДУ: } \frac{1}{y'} = \frac{1}{\frac{y}{x + y^2}} \Rightarrow x' = \frac{x + y^2}{y} \Rightarrow x' = \frac{1}{y} \cdot x + y$$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(y) \cdot x + b(y)$, где $a(y) = \frac{1}{y}$, $b(y) = y$, значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка относительно функции $x(y)$.

2. Запишем соответствующее линейное однородное ДУ (ЛОДУ): $x' = \frac{x}{y}$ - это ДУ является ДУ с разделяющимися переменными.

3. Решаем ЛОДУ:

$$x' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln C \Rightarrow \underline{x = C \cdot y} \text{ - решение ЛОДУ}$$

4. Заменим произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$$x = C(y) \cdot y$$

5. Найдем производную найденного решения: $x' = C'(y) \cdot y + C(y)$

Подставим найденные выражения в ДУ из п.1:

$$\underbrace{C'(y) \cdot y + C(y)}_{x'} = \frac{1}{y} \cdot \underbrace{C(y) \cdot y}_{x} + y$$

$$C'(y) \cdot y + \underline{C(y)} = \underline{C(y)} + y$$

$$C'(y) \cdot y = y$$

Замечание! Если все сделано правильно, то при подстановке из ДУ исчезает $C(y)$!

$$C'(y) = 1$$

6. Найдем функцию $C(y)$: $C(y) = \int 1 \cdot dy = y + \hat{C}$ 7. Подставим найденное выражение в решение из п.4: $x = (y + \hat{C}) \cdot y$ - решение линейного ДУ.8. $y = 0$ является решением (проверить самостоятельно).9. Ответ: $x = (y + C) \cdot y, \quad y = 0$

Пример №6. Решить линейное ДУ 1-го порядка методом подстановки

Дано: $x \cdot y' - 2y = 2x^4$

Решение:

1. Выразим старшую производную: $y' = 2 \frac{y}{x} + 2x^3$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x)$, где $a(x) = \frac{2}{x}$, $b(x) = 2x^3$, значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка.

2. Пусть $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Получим: $u' \cdot v + u \cdot v' = \frac{2}{x} \cdot u \cdot v + 2x^3$

$$u' \cdot v + u \cdot \left[v' - \frac{2}{x} \cdot v \right] = 2x^3$$

3. Найдем функцию v , такую что $v' - \frac{2}{x} \cdot v = 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x} \cdot v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2}{x} \cdot dx$$

$$\ln|v| = 2 \ln|x|$$

$$v = x^2$$

4. Подставим найденную функцию в уравнение:

$$u' \cdot x^2 + u \cdot [0] = 2x^3$$

$$u' = 2x$$

5. Найдем: $u = \int 2x \cdot dx = x^2 + C$

6. Запишем решение линейного ДУ: $y = (x^2 + C) \cdot x^2$

7. Потерянных решений нет (проверить самостоятельно).

8. Ответ: $y = (x^2 + C) \cdot x^2$

Пример №7. Решить ДУ Бернулли

Дано: $y' = y^4 \cdot \cos(x) + y \cdot \operatorname{tg}(x)$

Решение:

1. Выразим старшую производную: $y' = y \cdot \operatorname{tg}(x) + \cos(x) \cdot y^4$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^n$, где $a(x) = \operatorname{tg}(x)$, $b(x) = \cos(x)$, $n = 4$, значит данное ДУ является ДУ Бернулли.

2. Разделим обе части ДУ на y^4 : $\frac{y'}{y^4} = \frac{1}{y^3} \cdot \operatorname{tg}(x) + \cos(x)$

3. Сделаем замену: $z = \frac{1}{y^{4-1}} = y^{-3} \Rightarrow z' = -3 \cdot y^{-4} \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{-1}{3} \cdot z' \cdot y^4$

4. Подставим полученные выражения в ДУ из п.2:

$$\frac{-1}{3} \cdot \frac{z' \cdot y^4}{y^4} = y^{-3} \cdot \operatorname{tg}(x) + \cos(x)$$

$$z' = -3 \operatorname{tg}(x) \cdot z - 3 \cos(x) \text{ - это ЛДУ 1-го порядка}$$

5. Решаем ЛДУ методом вариации произвольной постоянной:

$$z' = -3 \operatorname{tg}(x) \cdot z$$

$$\frac{dz}{dx} = -3 \operatorname{tg}(x) \cdot z$$

$$\int \frac{dz}{z} = -3 \int \operatorname{tg}(x) \cdot dx$$

$$\ln|z| = 3 \ln|\cos(x)| + \ln C$$

$$z = C \cdot \cos^3(x)$$

$$z = C(x) \cdot \cos^3(x)$$

$$C'(x) \cdot \cos^3(x) + C(x) \cdot 3 \cos^2(x) \cdot (-\sin(x)) = -3 \operatorname{tg}(x) \cdot C(x) \cdot \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

$$C'(x) \cdot \cos^3(x) = -3 \cos(x)$$

$$C'(x) = -3 \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$C(x) = -3 \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = -3 \operatorname{tg}(x) + \hat{C}$$

$$z = (-3 \operatorname{tg}(x) + C) \cdot \cos^3(x) \text{ - решение ЛДУ}$$

6. Делаем обратную замену: $y^{-3} = (-3 \operatorname{tg}(x) + C) \cdot \cos^3(x)$ - решение ДУ Бернулли

7. $y = 0$ - потерянное решение ДУ (проверить самостоятельно).

8. Ответ: $y^{-3} = (-3 \operatorname{tg}(x) + C) \cdot \cos^3(x), \quad y = 0$

Пример №8. Решить ДУ в полных дифференциалахДано: $2x \cdot y \cdot dx = (y^2 - x^2)dy$ Решение:

1. Запишем ДУ в виде $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$: $\underbrace{2x \cdot y \cdot dx}_{M(x,y)} + \underbrace{(-y^2 + x^2)dy}_{N(x,y)} = 0$

Найдем: $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x$ и $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x$. Получили $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$, значит ДУ в полных дифференциалах.

2. Будем искать решение в виде $F(x, y) = C$, где $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ и $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$.

3. Найдем $F(x, y)$ из условия $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$:

$$F(x, y) = \int 2x \cdot y \cdot dx = 2y \int x \cdot dx = 2y \cdot \frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$F(x, y) = y \cdot x^2 + C(y)$$

4. Продифференцируем полученное выражение по y : $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x^2 + C'(y)$ и приравняем $N(x, y)$, получим:

$$x^2 + C'(y) = -y^2 + x^2$$

$$C'(y) = -y^2$$

5. Найдем $C(y) = \int -y^2 dy = -\frac{y^3}{3}$ (Константу интегрирования не пишем!)

6. Запишем искомую функцию: $F(x, y) = y \cdot x^2 - \frac{y^3}{3}$

7. Ответ: $y \cdot x^2 - \frac{y^3}{3} = C$ - решение ДУ в полных дифференциалах.

Пример №9. Решить ДУ неразрешенное относительно производнойДано: $y = \ln(1 + (y')^2)$ Решение:1. Данное ДУ неразрешено относительно y' , но разрешено относительно y :

$$y = \ln(1 + (y')^2)$$

2. Введем параметр $p = y' = \frac{dy}{dx}$, получим: $y = \ln(1 + p^2)$

3. Возьмем полный дифференциал левой и правой части уравнения:

$$dy = \frac{1}{1+p^2} \cdot 2p \cdot dp$$

4. Сделаем замену $dy = p dx$, получим:

$$p dx = \frac{1}{1+p^2} \cdot 2p \cdot dp$$

$$dx = \frac{2}{1+p^2} dp \text{ - получили ДУ с разделяющимися переменными}$$

5. Решаем ДУ:

$$\int dx = \int \frac{2}{1+p^2} dp$$

$$x = 2 \cdot \operatorname{arctg}(p) + C \text{ - решение ДУ с разделяющимися переменными}$$

6. Запишем решение исходного ДУ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \operatorname{arctg}(p) + C \\ y = \ln(1 + p^2) \end{cases}$$

7. Проверяем возможно потерянные решения: $p = 0 \Rightarrow y = \ln(1 + 0^2) = \ln 1 = 0$ Подставляем $y = 0$ в исходное ДУ: $0 = \ln(1 + (0')^2) \Rightarrow 0 = 0$ В полученном выражении левая часть равна правой (тождество), значит $y = 0$ - решение ДУ.8. Ответ:
$$\begin{cases} x = 2\operatorname{arctg}(p) + C \\ y = \ln(1 + p^2) \end{cases}, \quad y = 0$$

Пример №10. Решить ДУ неразрешенное относительно производнойДано: $y' \cdot (x - \ln y') = 1$ Решение:1. Данное ДУ неразрешено относительно y' , но разрешено относительно x :

$$x = \frac{1}{y'} + \ln y'$$

2. Введем параметр $p = y' = \frac{dy}{dx}$, получим: $x = \frac{1}{p} + \ln p$

3. Возьмем полный дифференциал левой и правой части уравнения:

$$dx = \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right)dp$$

4. Сделаем замену $dx = \frac{dy}{p}$, получим:

$$\frac{dy}{p} = \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right)dp$$

$$dy = \left(-\frac{1}{p} + 1\right)dp \text{ - получили ДУ с разделяющимися переменными}$$

5. Решаем ДУ:

$$\int dy = \int \left(-\frac{1}{p} + 1\right)dp$$

$$y = -\ln|p| + p + C \text{ - решение ДУ с разделяющимися переменными}$$

6. Запишем решение исходного ДУ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \ln p \\ y = -\ln p + p + C \end{cases}$$

7. Проверяем возможно потерянные решения: $p = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{0} + \ln 0$ - невозможно, следовательно потерянных решений нет.

8. Ответ: $\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \ln p \\ y = -\ln p + p + C \end{cases}$