

ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решить задачу поиска безусловного экстремума функции:

$$f(X) = x^2 + 2x \cdot y + 3y^2 + 20x + 10y + 2 \rightarrow \text{extr}.$$

Задание:

а) аналитически отыскать экстремум функции двух переменных (с использованием необходимых и достаточных условий безусловного экстремума);

б) сделать три итерации методом градиентного спуска из начальной точки $X^0 = (-1, -2)^T$ в направлении экстремума;

в) сделать две итерации методом наискорейшего градиентного спуска из начальной точки $X^0 = (-1, -2)^T$ в направлении экстремума;

г) сделать две итерации методом Гаусса–Зейделя из начальной точки $X^0 = (-1, -2)^T$ в направлении экстремума;

д) сделать две итерации методом сопряженных градиентов из начальной точки $X^0 = (-1, -2)^T$ в направлении экстремума;

е) сделать одну итерацию методом Ньютона из начальной точки $X^0 = (-1, -2)^T$ в направлении экстремума.

2. Решить задачу поиска условного экстремума при ограничении типа равенств:

$$f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 12 \rightarrow \text{extr}$$

при ограничении $2x_1 + x_2 = -1$.

Задание: найти решение задачи:

а) графически;

б) использованием необходимых и достаточных условий условного экстремума;

в) методом штрафных функций.

3. Решить задачу линейного программирования:

$$f(X) = 4x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}$$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Задание: найти решение задачи:

а) графически;

б) симплекс-методом.

4. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 2, \\x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -5, \\5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -1, \\10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 13.\end{aligned}$$

Задание: найти решение системы:

- а) методом простых итераций (точность счета $\varepsilon = 0,01$);
- б) методом Зейделя (точность счета $\varepsilon = 0,01$).

5. Решить нелинейное алгебраическое уравнение:

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0.$$

Задание:

- а) отделить корни алгебраического уравнения;
- б) уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом Ньютона на отрезке $[a, b]$ (точность счета $\varepsilon = 0,01$);
- в) уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом простых итераций на отрезке $[a, b]$ (точность счета $\varepsilon = 0,01$);
- г) уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом половинного деления на отрезке $[a, b]$ (точность счета $\varepsilon = 0,03$).

6. Дана сеточная функция, определенная таблицей:

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	1	10	2	1

Задание:

- а) построить интерполяционный многочлен Лагранжа;
- б) построить интерполяционный многочлен Ньютона;
- в) аппроксимировать функцию многочленами 1-го и 2-го порядков методом наименьших квадратов.

7. Дана сеточная функция, определенная таблицей:

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	1	10	2	1

Задание:

а) найти производные первого порядка, используя все двухточечные шаблоны во внутренних точках интервала $[x_0, x_3]$;

б) найти производные первого порядка, используя все трехточечные шаблоны во внутренних точках интервала $[x_0, x_3]$;

в) найти производные второго порядка, используя все трехточечные шаблоны во внутренних точках интервала $[x_0, x_3]$;

г) вычислить интеграл $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx$, используя формулу прямоугольников;

д) вычислить интеграл $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx$, используя модифицированную формулу прямоугольников;

е) вычислить интеграл $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx$, используя формулу трапеций.

8. Дана задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos x, \quad y(0) = 2.$$

Задание: найти решение задачи Коши:

а) аналитически;

б) явным методом Эйлера на отрезке $[0, 1]$. Число разбиений отрезка выбрать $N = 2, 4, 5$. Построить графики аналитического и численного решений на одном чертеже;

в) методом предсказания и коррекции на отрезке $[0, 1]$. Число разбиений отрезка выбрать $N = 2, 4, 5$. Построить графики аналитического и численного решений на одном чертеже;

г) неявным методом Эйлера на отрезке $[0, 1]$. Число разбиений отрезка выбрать $N = 2, 4, 5$. Построить графики аналитического и численного решений на одном чертеже;

д) методом трапеций на отрезке $[0, 1]$. Число разбиений отрезка выбрать $N = 2, 4, 5$. Построить графики аналитического и численного решений на одном чертеже.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ

В приведенной таблице указаны ссылки на теорию и алгоритмы решения задач, содержащихся в типовом задании. Рекомендуется сначала изучить материал лекции, обращая внимание на основные определения, постановки задач, принципы формирования численных методов. Далее необходимо проработать материал практического занятия, изучив алгоритм и пошаговое решение типового примера.

Номера лекций и занятий	Номер задания, тема
Лекция 1,3,4 Занятия 1,2	1. Необходимые и достаточные условия безусловного экстремума. Численные методы первого и второго порядка
Лекции 2,5 Занятие 3	2. Необходимые и достаточные условия условного экстремума. Ограничения типа равенств. Численные методы поиска условного экстремума
Лекция 5 Занятие 4	3. Задача линейного программирования
Лекция 7 Занятие 5	4. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений
Лекция 9 Занятие 5	5. Итерационные методы решения нелинейных уравнений
Лекции 11, 12 Занятие 6	6. Методы интерполяции и аппроксимации сеточных функций
Лекция 13	7. Методы численного дифференцирования и интегрирования сеточных функций
Лекции 14 Занятие 7	8. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений