Семинар 8.

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА. МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Функционалы $\int\limits_{t_0}^{T} F\big(t, x(t), x'(t)\big)dt$, зависящие от одной функции

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$, где t_0 и T заданы, т.е. $x(t) \in C^1([t_0, T])$;

б) функции $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(T) = x_T, \tag{1}$$

где значения x_0, x_T заданы, т.е. кривые проходят через две закрепленные граничные точки.

На множестве $\mathcal{M}$ задан функционал

$$I[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{T} F\big(t, x(t), x'(t)\big)dt, \tag{2}$$

где подынтегральная функция $F(t, x, x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал (2) достигает экстремума, т.е.

$$I[x^*(t)] = \operatorname*{extr}_{x(t)\in\mathcal{M}} \int\limits_{t_0}^{T} F\big(t, x(t), x'(t)\big)dt. \tag{3}$$

Так как на кривые $x(t)$, образующие множество $\mathcal{M}$, не наложено дополнительных условий, кроме граничных, задача (3) называется задачей поиска ***безусловного экстремума***. Этому классу задач посвящена вторая глава. В третьей главе рассматриваются задачи поиска ***условного экстремума***, когда на искомые функции кроме граничных условий накладываются дополнительные конечные, интегральные или дифференциальные условия.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ (3)

1. Найти F_x, $F_{x'}$, $\dfrac{d}{dt}F_{x'}$ и записать ***уравнение Эйлера***

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 .$$

2. Найти общее решение уравнения Эйлера $x = x(t, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

3. Определить постоянные C_1 и C_2 из граничных условий, решая систему

$$x(t_0, C_1, C_2) = x_0 ,$$
$$x(T, C_1, C_2) = x_T .$$

В результате получить экстремаль $x^*(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала.

З а м е ч а н и е.

1. Уравнение Эйлера можно записать в развернутой форме

$$F_x - F_{x't} - F_{x'x} \cdot x' - F_{x'x'} \cdot x'' = 0$$

и при $F_{x'x'} \neq 0$ представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение $x = x(t, C_1, C_2)$ зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и определяет двухпараметрическое ***семейство экстремалей***. Два граничных условия $x(t_0) = x_0$ и $x(T) = x_T$ позволяют найти постоянные C_1 и C_2 и, как следствие, кривую $x^*(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала. Чтобы выяснить, достигается ли на экстремали экстремум функционала, а если да, то какой (минимум или максимум), следует использовать достаточные условия.

2. Уравнение Эйлера интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Приведем некоторые простейшие ***случаи интегрируемости уравнения Эйлера***.

Первый случай. Функция $F(t, x, x')$ не зависит от x явно: $F(t, x, x') = F(t, x')$. Уравнение Эйлера принимает вид $\frac{d}{dt} F_{x'} = 0$ и, следовательно,

$$F_{x'} = C_1 .$$

Соотношение называется *первым интегралом* уравнения Эйлера.

Второй случай. Функция $F(t, x, x')$ не зависит от t и x явно: $F(t, x, x') = F(x')$. Уравнение Эйлера записывается в форме $F_{x'x'} \cdot x'' = 0$. Его общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1\, t + C_2 ,$$

так как $x'' = 0$, а условие $F_{x'x'} = 0$ дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Если уравнение $F_{x'x'}(x') = 0$ имеет один или несколько действительных корней вида $x' = k_i$, то получаем однопараметрические семейства прямых $x(t) = k_i\, t + C$, содержащиеся в двухпараметрическом семействе.

Третий случай. Функция $F(t,x,x')$ не зависит от t и x' явно: $F(t,x,x') = F(x)$ или не зависит от x' явно: $F(t,x,x') = F(t,x)$. Задача (3) в общем случае решения не имеет, так как уравнение Эйлера принимает вид

$$F_x = 0$$

и не является дифференциальным, т.е. его решение не содержит элементов произвола и поэтому не удовлетворяет граничным условиям. Однако, если решение уравнения $F_x = 0$ проходит через граничные точки (t_0, x_0) и (T, x_T), экстремаль существует.

Четвертый случай. Подынтегральная функция имеет вид

$$F(t,x,x') = P(t,x) + Q(t,x)x'.$$

Уравнение Эйлера записывается в форме

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Это уравнение не является дифференциальным. Если его решение удовлетворяет граничным условиям, то экстремаль существует. Если $\dfrac{\partial P}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial t}$, то под знаком интеграла (2) находится полный дифференциал и, следовательно, величина интеграла не зависит от пути интегрирования, а вариационная задача теряет смысл.

Пятый случай. Функция $F(t,x,x')$ не зависит от t явно: $F(t,x,x') = F(x,x')$. Уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - x' F_{x'} = C_1.$$

Заметим, что часто непосредственное применение уравнения Эйлера оказывается проще использования первых интегралов.

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^1 \left[x^2(t) + x'^2(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

□ 1. Запишем уравнение Эйлера. Так как $F = x^2 + x'^2$, $F_x = 2x$, $F_{x'} = 2x'$, $\dfrac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 2x''$, получаем $2x - 2x'' = 0$ или $x'' - x = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Оно является однородным с постоянными коэффициентами, поэтому составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ – действительные разные. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}.$$

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0,$$
$$x(1) = C_1 e + C_2 \frac{1}{e} = 1.$$

Отсюда $C_1 = \frac{e}{e^2 - 1}$, $C_2 = \frac{e}{1 - e^2}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \frac{e}{e^2 - 1} e^t + \frac{e}{1 - e^2} e^{-t}$.■

Пример 2. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_{-1}^{0} \left[12t\, x(t) - x'^2(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(-1) = 1$, $x(0) = 0$.

□ 1. Составим уравнение Эйлера (9). Так как $F = 12t\, x - x'^2$, $F_x = 12t$, $F_{x'} = -2x'$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = -2x''$, получаем $12t - (-2x'') = 0$ или $x'' = -6t$.

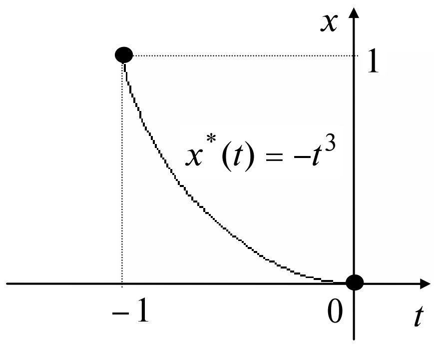

Рис. 1

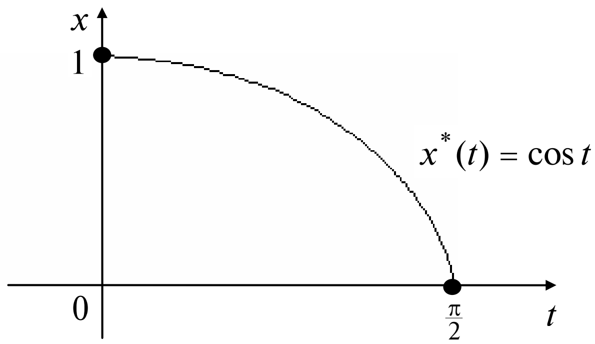

Рис. 2

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя дважды левую и правые части уравнения $x'' = -6t$: $x' = -3t^2 + C_1$, $x(t) = -t^3 + C_1 t + C_2$.

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(-1) = 1 - C_1 + C_2 = 1,$$
$$x(0) = C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = -t^3$ (рис.1) .■

Пример 3. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[x'^2(t) - x^2(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

□ Решим задачу двумя способами.

Первый способ.

1. Составим уравнение Эйлера. Так как $F = x'^2 - x^2$, $F_x = -2x$, $F_{x'} = 2x'$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 2x''$, получаем $-2x - 2x'' = 0$ или $x'' + x = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Поскольку оно является однородным с постоянными коэффициентами, то составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$. Его корни $x_{1,2} = \alpha \pm \beta i = \pm i$ – комплексные разные $(\alpha = 0, \beta = 1)$. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 = 1, \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 = 0.$$

Отсюда получаем экстремаль $x^*(t) = \cos t$ (рис. 2).

Второй способ.

1. Заметим, что подынтегральная функция $F = x'^2 - x^2$ не зависит явно от t, следовательно, соответствует пятому случаю интегрируемости. Уравнение Эйлера имеет первый интеграл:

$$F - x'F_{x'} = x'^2 - x^2 - x' \cdot (2x') = C_1 \text{ или } x'^2 + x^2 = -C_1 = C^2.$$

2. Найдем общее решение дифференциального уравнения. Сделаем замену переменной: $x' = \frac{dx}{dt} = \tau$. Отсюда $x^2 = C^2 - \tau^2$ и $x = \sqrt{C^2 - \tau^2}$, $dx = -\frac{2\tau}{2\sqrt{C^2 - \tau^2}} d\tau$. Но $dt = \frac{dx}{\tau} = -\frac{d\tau}{\sqrt{C^2 - \tau^2}}$. Проинтегрировав обе части, получим $t = -\arcsin \frac{\tau}{C} + C_2$. Тогда $\arcsin \frac{\tau}{C} = C_2 - t$, $\frac{\tau}{C} = \sin(C_2 - t)$, $\tau = C \sin(C_2 - t)$. Поэтому $x(t) = \sqrt{C^2 - \tau^2} = \sqrt{C^2 - C^2 \sin^2(C_2 - t)} = C \cos(C_2 - t)$ – общее решение уравнения Эйлера.

3. Определим постоянные C и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C \cos C_2 = 1,$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = C \cos\left(C_2 - \frac{\pi}{2}\right) = C \sin C_2 = 0.$$

Отсюда $C = 1$, $C_2 = 0$. В результате получена экстремаль $x^*(t) = \cos t$. Заметим, что в данной задаче непосредственное применение уравнения Эйлера приводит к более простому дифференциальному уравнению.■

Пример 4. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int\limits_0^1 \left[4x(t) - x'^2(t) + 12t\, x'(t)\right]dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x(1) = 4$.

☐ 1. Запишем уравнение Эйлера. Так как $F = 4x - x'^2 + 12tx'$, $F_x = 4$, $F_{x'} = -2x' + 12t$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = -2x'' + 12$, то $4 + 2x'' - 12 = 0$ или $x'' = 4$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя последовательно обе части: $x'(t) = 4\,t + C_1$, $x(t) = 2\,t^2 + C_1 t + C_2$.

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_2 = 1\,,$$

$$x(1) = 2 + C_1 + C_2 = 4.$$

Отсюда $C_1 = 1,$ $C_2 = 1$. В результате находим экстремаль $x^*(t) = 2t^2 + t + 1$.■

Пример 5. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int\limits_0^{\ln 2} \left[x'^2(t) + 2x^2(t) + 2x(t)\right] e^{-t}dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = x(\ln 2) = 0$.

☐ 1. Запишем уравнение Эйлера. Так как $F = \left(x'^2 + 2x^2 + 2x\right)e^{-t}$, $F_x = (4x + 2)e^{-t}$, $F_{x'} = 2x'\, e^{-t}$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 2x''\, e^{-t} - 2x'\, e^{-t}$, то получаем

$$(4x + 2)e^{-t} - 2x''\, e^{-t} + 2x'\, e^{-t} = 0 \quad \text{или} \quad x'' - x' - 2x = 1\,.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера:

а) определим общее решение однородного уравнения $x'' - x' - 2x = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ – действительные разные: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, поэтому $x_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$;

б) подберем частное решение неоднородного уравнения в виде $x_ч(t) = A$. Подставляя в уравнение, получаем $-2A = 1$ или $A = -\frac{1}{2}$;

в) найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму результатов пп. «а» и «б» : $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}$.

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0\,,$$

$$x(\ln 2) = C_1 e^{2\ln 2} + C_2 e^{-\ln 2} - \frac{1}{2} = C_1 e^{\ln 4} + C_2 e^{\ln\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 4\,C_1 + \frac{1}{2}C_2 - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{14}$, $C_2 = \frac{3}{7}$ и, следовательно, получаем экстремаль $x^*(t) = \frac{1}{14}e^{2t} + \frac{3}{7}e^{-t} - \frac{1}{2}$.■

Пример 6. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^1 \left[x^2(t) + x'^2(t) + 2x(t)e^t\right]dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 0$.

□ 1. Запишем уравнение Эйлера. Так как $F = x^2 + x'^2 + 2xe^t$, $F_x = 2x + 2e^t$, $F_{x'} = 2x'$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 2x''$, то получаем

$$2x + 2e^t - 2x'' = 0 \quad \text{или} \quad x'' - x = e^t.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера:

а) определим общее решение однородного уравнения $x'' - x = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$ действительные разные: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Поэтому $x_0(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} = C_1e^t + C_2e^{-t}$;

б) подберем частное решение неоднородного уравнения в виде $x_ч(t) = Ate^t$, где A – неизвестный параметр. Тогда $x'_ч(t) = Ae^t + Ate^t$, $x''_ч(t) = 2Ae^t + Ate^t$. Подставляя в неоднородное уравнение, получаем

$$2Ae^t + Ate^t - Ate^t = e^t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях от t, имеем $2A = 1$ или $A = \frac{1}{2}$. Поэтому $x_ч(t) = \frac{t}{2}e^t$;

в) найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму результатов пп. «а» и «б» : $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{t}{2}e^t$.

3. Определяем постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$x(1) = C_1e + C_2e^{-1} + \frac{e}{2} = 0.$$

Получаем $C_1 = -\frac{e^2}{2(e^2-1)}$, $C_2 = \frac{e^2}{2(e^2-1)}$ и, как следствие, экстремаль $x^*(t) = -\frac{e^2}{2(e^2-1)}e^t + \frac{e^2}{2(e^2-1)}e^{-t} + \frac{t}{2}e^t$.■

Пример 7. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_1^2 [\,3t\,x'^5(t) - 5x(t)\,x'^4(t)\,]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 1$, $x(2) = 4$.

□ 1. Запишем уравнение Эйлера. Так как $F = 3tx'^5 - 5xx'^4$, $F_x = -5x'^4$, $F_{x'} = 15tx'^4 - 20xx'^3$; $\dfrac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 15x'^4 + 60\,tx'^3x'' - 20x'^4 - 60\,xx'^2x''$,

то $-5\,x'^4 - 15\,x'^4 - 60\,tx'^3x'' + 20\,x'^4 + 60\,xx'^2x'' = 0$ или $x'^2x''(x - tx') = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Оно распадается на три уравнения.

Первое уравнение $x'^2 = 0$ имеет решение $x(t) = C$. Прямые этого семейства не принадлежат классу допустимых кривых, так как не удовлетворяют граничным условиям.

Второе уравнение $x'' = 0$ имеет решение $x(t) = C_1\,t + C_2$.

Третье уравнение $x - tx' = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{t}$. Оно имеет решение $x(t) = C\,t$, которое включается в семейство $x(t) = C_1\,t + C_2$.

3. Найдем постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(1) = C_1 + C_2 = 1,$$

$$x(2) = 2C_1 + C_2 = 4.$$

Отсюда $C_1 = 3$, $C_2 = -2$, $x^*(t) = 3t - 2$ – экстремаль.■

Пример 8. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{18}} \left[\,x'^2(t) - 37x(t)x'(t) - 81\,x^2(t)\,\right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x\left(\dfrac{\pi}{18}\right) = -1$.

□ 1. Составим уравнение Эйлера. Так как $F = x'^2 - 37xx' - 81x^2$, $F_x = -37x' - 162x$, $F_{x'} = 2x' - 37x$, $\dfrac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 2x'' - 37x'$, то уравнение имеет вид

$$-37x' - 162x - (2x'' - 37x') = 0 \quad \text{или} \quad x'' + 81x = 0.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Аналогично п.2 примера 3 получаем $\lambda^2+81=0$, $\lambda_{1,2}=\pm 9i$, $x(t)=C_1\cos 9t+C_2\sin 9t$.

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0)=C_1=1,$$

$$x\left(\frac{\pi}{18}\right)=C_2=-1.$$

В результате получаем экстремаль $x^*(t)=\cos 9t-\sin 9t$.■

Пример 9. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)]=\int_0^2\left[x'^2(t)+t\,x'(t)\right]dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=0$, $x(2)=0$.

□ 1. Запишем уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F=x'^2+tx'$ не зависит от x явно и, следовательно, соответствует первому случаю интегрируемости. Уравнение Эйлера имеет первый интеграл:

$$F_{x'}=2x'+t=C_1.$$

2. Решим уравнение Эйлера $x'=\frac{C_1-t}{2}=\frac{C_1}{2}-\frac{t}{2}$. Интегрируя, получаем

$$x(t)=\frac{C_1}{2}t-\frac{t^2}{4}+C_2.$$

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0)=C_2=0,$$

$$x(2)=C_1-1+C_2=0.$$

Отсюда $C_1=1$, $C_2=0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t)=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}$.■

Пример 10. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)]=\int_1^2\frac{\sqrt{1+x'^2(t)}}{t}dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1)=3+\sqrt{3}$, $x(2)=3$.

□ 1. Запишем уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F=\frac{\sqrt{1+x'^2}}{t}$ не зависит от x явно и, следовательно, соответствует первому случаю интегрируемости. Уравнение Эйлера имеет первый интеграл:

$$F_{x'}=\frac{x'}{t\sqrt{1+x'^2}}=C_1=\frac{1}{C}.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Имеем $\dfrac{x' C}{\sqrt{1+x'^2}} = t$. Сделаем подстановку $x' = \dfrac{dx}{dt} = \operatorname{tg}\tau$: $t = \dfrac{C \cdot \operatorname{tg}\tau}{\dfrac{1}{\cos\tau}} = C\sin\tau$. Найдем дифференциал: $dt = C\cos\tau\, d\tau$. С учетом равенства $dx = \operatorname{tg}\tau\, dt$ получаем $dx = \operatorname{tg}\tau \cdot C \cdot \cos\tau\, d\tau = C\sin\tau\, d\tau$. Интегрируя, имеем $x(t) = -C\cos\tau + C_2$.

Из системы

$$t = C\sin\tau, \quad x(t) - C_2 = -C\cos\tau,$$

возводя в квадрат каждое уравнение и складывая, находим $t^2 + (x(t) - C_2)^2 = C^2$ – общий интеграл уравнения Эйлера.

3. Определим постоянные C и C_2 из граничных условий:

$$x(1) = 3 + \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \left(3 + \sqrt{3} - C_2\right)^2 = C^2,$$

$$x(2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 + (3 - C_2)^2 = C^2.$$

Отсюда $C_2 = 3$, $C^2 = 4$. В результате получаем экстремаль $t^2 + \left(x^*(t) - 3\right)^2 = 4$. Так как $x(1) = 3 + \sqrt{3}$, экстремум может достигаться лишь на кривой $x^*(t) = 3 + \sqrt{4 - t^2}$, $t \in [1, 2]$.■

Пример 11. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^2 \left[x'^4(t) + x'^3(t)\right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(2) = 4$.

□ 1,2. Запишем уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F = x'^4 + x'^3$ не зависит от t и x явно и, следовательно, соответствует второму случаю интегрируемости. Общее решение уравнения Эйлера имеет вид (12): $x(t) = C_1 t + C_2$.

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_2 = 0,$$

$$x(2) = 2C_1 + C_2 = 4.$$

Отсюда $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = 2t$.■

Пример 12. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_1^3 \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 2$, $x(3) = 0$.

□ 1,2. Запишем уравнение Эйлера и его общее решение. Подынтегральная функция $F = \sqrt{1 + x'^2}$ не зависит от t и x явно. Общее решение уравнения Эйлера, соответствующее второму случаю интегрируемости, имеет вид: $x(t) = C_1 t + C_2$.

3. Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(1) = C_1 + C_2 = 2,$$

$$x(3) = 3C_1 + C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = 3$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = -t + 3$. Заметим, что тем самым получено решение примера о поиске гладкой кривой, соединяющей две точки и имеющей наименьшую длину.■

Пример 13. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_1^2 \left[x^2(t) + x(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 0$, $x(2) = 1$.

□ Запишем уравнение Эйлера и решим его. Подынтегральная функция $F = x^2 + x$ не зависит от t и x'. Она соответствует третьему случаю интегрируемости. Уравнение Эйлера имеет вид: $F_x = 2x + 1 = 0$.

Отсюда $x(t) = -\frac{1}{2}$. Поставленная задача не имеет решения, так как кривая $x(t) = -\frac{1}{2}$ не удовлетворяет заданным граничным условиям $x(1) = 0$, $x(2) = 1$.

Заметим, что решение существует, если граничные условия другие, а именно: $x(1) = -\frac{1}{2}$, $x(2) = -\frac{1}{2}$.■

Пример 14. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} \left[x^2(t) + 2t\, x(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$.

□ Запишем уравнение Эйлера и решим его. Подынтегральная функция $F = x^2 + 2tx$ не зависит от x' и соответствует третьему случаю интегрируемости. Уравнение Эйлера имеет вид: $F_x = 2x + 2t = 0$ или $x(t) = -t$. Задача имеет решение, если найденная прямая проходит через граничные точки, т.е. при $x(t_0) = -t_0 = x_0$, $x(T) = -T = x_T$.■

Пример 15. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^2 \left[x^2(t) + t\, x'(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(2) = 1$.

□ Запишем уравнение Эйлера и решим его. Подынтегральная функция $F(t, x, x') = P(t, x) + Q(t, x)x' = x^2 + tx'$, т.е. $P(t, x) = x^2$, $Q(t, x) = t$ (четвертый случай интегрируемости). Уравнение Эйлера принимает форму $2x-1=0$. Отсюда $x(t)=\frac{1}{2}$. Задача не имеет решения, так как полученная функция не удовлетворяет граничным условиям.■

Пример 16. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)]=\int_0^1\left[2x^3(t)+3t^2x'(t)\right]dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=0$, $x(1)=x_T$.

□ Запишем уравнение Эйлера и решим его. Подынтегральная функция $F(t,x,x')=P(t,x)+Q(t,x)x'=2x^3+3t^2x'$, т.е. $P(t,x)=2x^3$, $Q(t,x)=3t^2$ (четвертый случай интегрируемости). Уравнение Эйлера принимает форму $6x^2-6t=0$ или $x^2=t$.

Граничное условие $x(0)=0$ удовлетворяется, а условие $x(1)=x_T$ выполняется при $x_T^2=1$. Таким образом, экстремаль существует только тогда, когда $x_T=1$ или $x_T=-1$.■

Пример 17. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)]=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[x^2(t)\cos t+2x(t)x'(t)\sin t\right]dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

□ Подынтегральная функция имеет вид

$$F=x^2\cos t+2x\sin t\,x'=P(t,x)+Q(t,x)x',\ \text{т.е.}\ P(t,x)=x^2\cos t,\ Q(t,x)=2x\sin t.$$

Так как $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}=2x\cos t$, $\frac{\partial Q}{\partial t}=2x\cos t$, то $\frac{\partial P}{\partial x}\equiv\frac{\partial Q}{\partial t}$. Выражение под знаком интеграла является полным дифференциалом функции $x^2\sin t$. Величина функционала не зависит от пути интегрирования, а вариационная задача не имеет смысла (см. четвертый случай). Значение функционала равно

$$I=\int_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}x^2\cos t\,dt+2x\sin t\,dx=\int_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}d\left(x^2\sin t\right)=x^2\sin t\Bigg|_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$ ■

МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Функционалы $\int\limits_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))dt$, зависящие от одной функции.

Случай гладких экстремалей

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathscr{M}$ допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям (см. рис.1):

а) функции $x(t)$ непрерывно дифференцируемые, т.е. $x(t) \in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются значения t_0 и T, которые заранее не заданы;

б) значения $t_0, x_0 = x(t_0)$ и T, $x_T = x(T)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям:

$$\psi(t_0, x_0) = 0, \qquad \varphi(T, x_T) = 0, \tag{1}$$

где $\psi(t, x)$, $\varphi(t, x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве $\mathscr{M}$ задан функционал

$$I[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))\, dt, \tag{2}$$

где функция $F(t, x, x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству $\mathscr{M}$, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал (2) достигает экстремума , т.е.

$$I\left[x^*(t)\right] = \operatorname*{extr}_{x(t)\in\mathscr{M}} \int\limits_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))\, dt\,. \tag{*}$$

З а м е ч а н и я.

1. Условия (1) определяют подвижные границы (рис. 1). Таким образом, экстремум в поставленной задаче ищется в классе гладких кривых, концы которых скользят по двум заданным линиям, описываемым уравнениями $\psi(t_0, x_0) = 0$ (для левого конца), $\varphi(T, x_T) = 0$ (для правого конца).

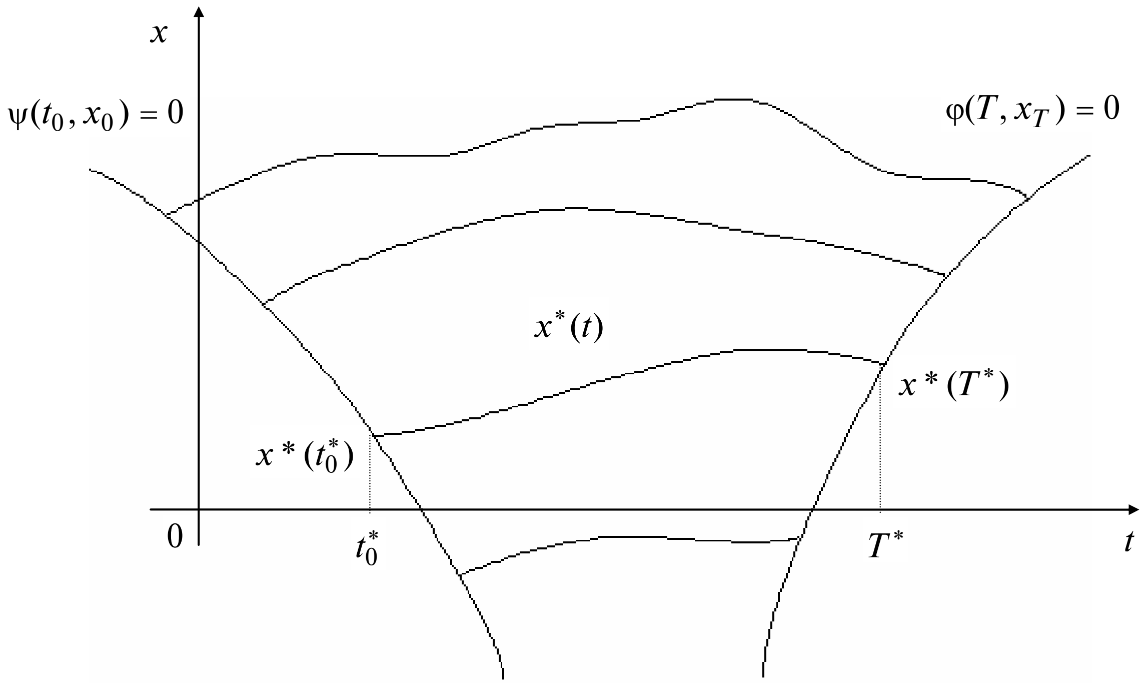

Рис. 1

Можно выделить следующие частные случаи общей постановки задачи.

А. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым, описываемым уравнениями: $t = t_0$, $t = T$ (рис. 2).

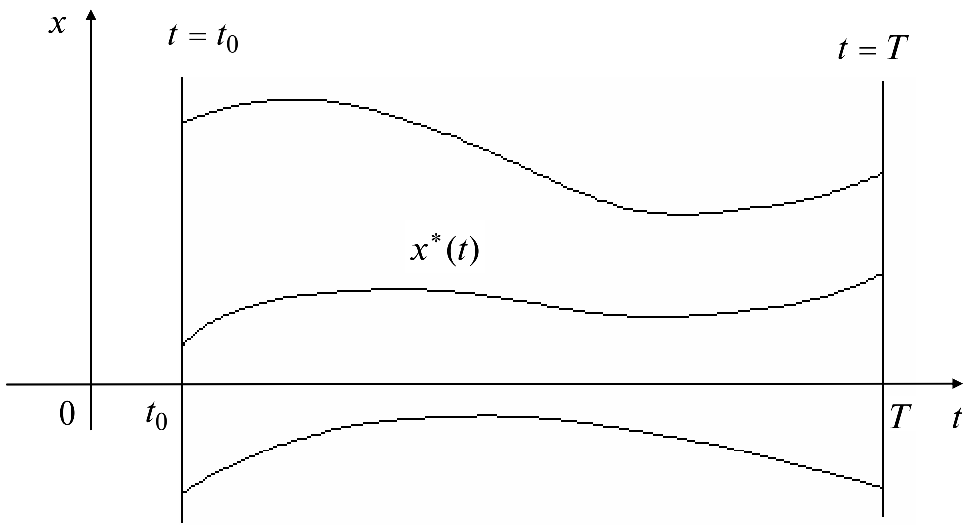

Рис. 2

Б. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым, описываемым уравнениями

$$x = \psi(t), \quad x = \varphi(t).$$

Рисунок аналогичен рис. 1.

В рамках рассматриваемого частного случая выделим задачу, в которой заданные кривые являются прямыми линиями, параллельными оси абсцисс: $x = x_0$, $x = x_T$ (рис. 3).

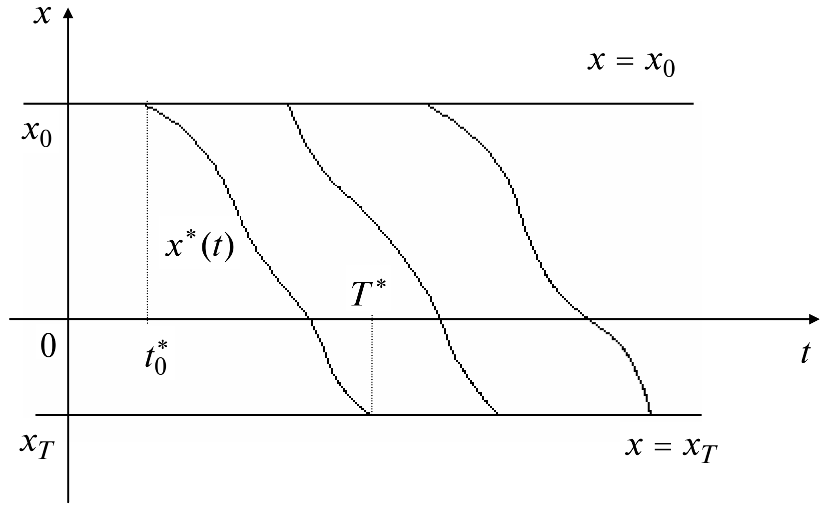

Рис. 3

2. В поставленной задаче наряду с поиском кривой $x^*(t)$ фактически производится выбор значений $t_0{}^*$ и T^* (см. рис. 2 и рис. 3), т.е. ищется тройка ($x^*(t), t_0{}^*, T^*$). При этом ее ε-окрестность первого порядка ($\varepsilon > 0$) образуется тройками ($x(t), t_0, T$), удовлетворяющими условию

$$\left\| x(t) - x^*(t) \right\|_{C^1(\Delta)} < \varepsilon, \qquad \left| t_0 - t_0{}^* \right| < \varepsilon, \qquad \left| T - T^* \right| < \varepsilon .$$

Функционал (2) точнее записывается в форме

$$I\left[x(t), t_0, T\right] = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))\, dt .$$

Функционал достигает на тройке ($x^*(t), t_0{}^*, T^*$) слабого минимума, если $I\left[x(t), t_0, T\right] \geq I\left[x^*(t), t_0{}^*, T^*\right]$ в ε-окрестности первого порядка.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Теорема (необходимые условия экстремума функционала в задаче (*)).

Если на функции $x^*(t) \in C^1(\Delta)$, *удовлетворяющей граничным условиям* $\psi(t_0, x_0) = 0,\ \varphi(T, x_T) = 0$, *функционал* (2) *достигает слабого экстремума, то она удовлетворяет*:

а) *уравнению Эйлера* $F_x - \dfrac{d}{dt} F_{x'} = 0$;

б) *условиям трансверсальности*:

$$\delta\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t_0^*, x^*(t_0^*)} \delta t_0 + \frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{t_0^*, x^*(t_0^*)} \delta x_0 = 0,$$

$$\delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{T^*, x^*(T^*)} \delta T + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{T^*, x^*(T^*)} \delta x_T = 0,$$

$$F_{x'}\Big|_{t=T^*} \cdot \delta x_T + [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=T^*} \cdot \delta T = 0,$$

$$F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} \cdot \delta x_0 + [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=t_0^*} \cdot \delta t_0 = 0.$$

З а м е ч а н и я.

1. Если один из концов допустимых кривых закреплен, то условия трансверсальности для этого конца не выписываются.

2. Если рассматривается задача, в которой концы кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым $t = t_0$, $t = T$ (см. рис.2), поскольку t_0 и T заданы, то вариации $\delta t_0 = 0$, $\delta T = 0$. Следовательно, условия трансверсальности имеют вид

$$F_{x'}\Big|_{t=T^*} = 0, \quad F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} = 0.$$

3. Если концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым $x = \psi(t)$ и $x = \varphi(t)$, то условия трансверсальности можно записать в виде

$$[F + (\varphi' - x')F_{x'}]\Big|_{t=T^*} = 0,$$

$$[F + (\psi' - x')F_{x'}]\Big|_{t=t_0^*} = 0.$$

Если рассматривается случай задания кривых в виде

$$x = x_0 = \psi(t) = \text{const}, \quad x = x_T = \varphi(t) = \text{const},$$

то $\varphi'(t) \equiv 0, \;\; \psi'(t) \equiv 0$, а условия упрощаются:

$$[F - x' F_{x'}]\Big|_{t=T^*} = 0, \quad [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=t_0^*} = 0.$$

4. Если условия $\psi(t_0, x_0) = 0$, $\varphi(T, x_T) = 0$, отсутствуют, то вариации δx_T, δT, δx_0 , δt_0 произвольны. Тогда

$$F_{x'}\Big|_{t=T^*} = 0, \quad [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=T^*} = 0,$$

$$F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} = 0, \quad [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=t_0^*} = 0.$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (*)

1. Записать уравнение Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 .$$

2. Найти общее решение уравнения Эйлера: $x = x(t, C_1, C_2)$.

3. Записать условия трансверсальности и граничные условия $\psi(t_0, x_0) = 0$, $\varphi(T, x_T) = 0$. В частных случаях граничных условий выбрать требуемое условие трансверсальности.

4. Определить C_1, C_2, t_0^*, T^* и получить уравнение экстремали $x^*(t)$.

Пример 1. Найти кривую, на которой функционал

$$I[x(t)] = \int_0^2 [\, 2t \cdot x(t) + x(t)\, x'(t) + x'^{\,2}(t) \,]\, dt$$

может достигать экстремума, если левый конец ее фиксирован в точке $A(0,0)$, а правый лежит на прямой $t = T = 2$ (рис. 2.12).

□ 1. Составим уравнение Эйлера. Так как

$$F = 2t \cdot x + x \cdot x' + x'^{\,2}, \quad F_x = 2t + x', \quad F_{x'} = x + 2x', \quad \frac{d}{dt} F_{x'} = x' + 2x'',$$

уравнение Эйлера имеет вид

$$2t + x' - x' - 2x'' = 0 \quad \text{или} \quad x'' = t .$$

2. Последовательно интегрируя, найдем общее решение уравнения Эйлера:

$$x'(t) = \frac{t^2}{2} + C_1, \quad x(t) = \frac{t^3}{6} + C_1\, t + C_2 .$$

3. Поскольку правый конец допустимых кривых скользит по вертикальной прямой $t = 2$, то запишем условия трансверсальности на правом конце и граничные условия на левом конце:

$$x(0) = 0,$$

$$F_{x'}\big|_{T=2} = x + 2x' \big|_{T=2} = x(2) + 2x'(2) = 0 .$$

4. Найдем постоянные C_1, C_2:

$$x(0) = C_2 = 0,$$

$$x(2) + 2x'(2) = \frac{8}{6} + 2C_1 + C_2 + 4 + 2C_1 = 0.$$

Отсюда $C_2 = 0$, $C_1 = -\frac{4}{3}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{4t}{3}$ (см. рис. 4). ■

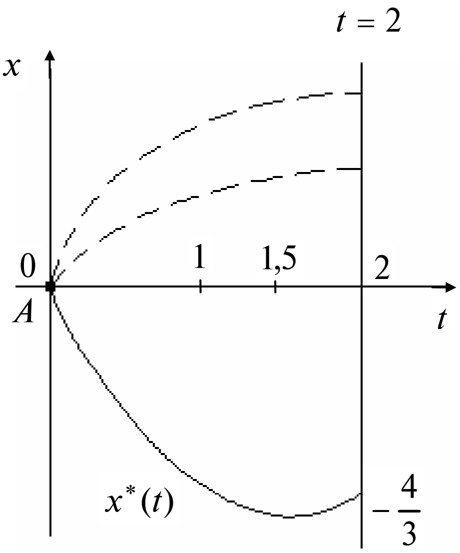

Рис. 4

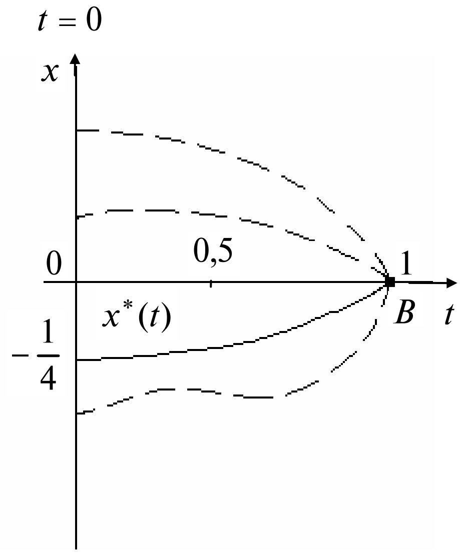

Рис. 5

Пример 2 (можно опустить). Найти кривую, на которой функционал

$$I[x(t)] = \int_0^1 [\, x'^2(t) + x(t) \,]\, dt$$

может достигать экстремума, если правый конец ее фиксирован в точке $B(1,0)$, а левый лежит на прямой $t = 0$ (рис. 5).

□ 1. Записываем уравнение Эйлера. Так как

$$F = x'^2 + x, \quad F_x = 1, \quad F_{x'} = 2x', \quad \frac{d}{dt} F_{x'} = 2x'', \text{ то } \quad 1 - 2x'' = 0.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера:

$$x''(t) = \frac{1}{2}, \quad x'(t) = \frac{1}{2}t + C_1, \quad x(t) = \frac{1}{4}t^2 + C_1 t + C_2.$$

3. Поскольку левый конец допустимых кривых скользит по вертикальной прямой $t = 0$, то записываем условие трансверсальности на левом конце и граничное условие на правом конце:

$$F_{x'}\big|_{t=0} = 2x'(0) = 0, \qquad x(1) = 0.$$

4. Найдем постоянные C_1 и C_2:

$$x'(0) = C_1 = 0,$$

$$x(1) = \frac{1}{4} + C_1 + C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{4}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 1)$ (см. рис. 5). ■

Пример 3. Среди всех гладких кривых, соединяющих точку $A(0,0)$ с прямой $x = 1$, найти кривую, на которой функционал

$$I[x(t)] = \int\limits_0^T [\, t \cdot x'(t) + x'^2(t)\,]\, dt$$

может достигать экстремума (рис. 2.14).

□ 1. Запишем уравнение Эйлера. Так как

$$F = t \cdot x' + x'^2, \quad F_x = 0, \quad F_{x'} = t + 2x', \quad \frac{d}{dt} F_{x'} = 1 + 2x'',$$

уравнение Эйлера имеет вид $-1 - 2x'' = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера:

$$x''(t) = -\frac{1}{2}, \qquad x'(t) = -\frac{t}{2} + C_1, \qquad x(t) = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$$

3. Так как правый конец допустимых кривых лежит на прямой $x = \varphi(t) = 1$, параллельной оси абсцисс, запишем условие трансверсальности на правом конце и граничные условия:

$$F - x' F_{x'}\big|_{t=T} = t \cdot x' + x'^2 - x' \cdot (t + 2x')\big|_{t=T} = -x'^2\big|_{t=T} = 0 \quad \text{или} \quad x'(T) = 0,$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = \varphi(T) = 1.$$

4. Найдем C_1, C_2, T^*:

$$x'(T) = -\frac{T}{2} + C_1 = 0,$$

$$x(0) = C_2 = 0, \quad x(T) = -\frac{T^2}{4} + C_1 T + C_2 = 1.$$

Отсюда $C_1 = \frac{T}{2}$, $\frac{T^2}{4} = 1$, $C_2 = 0$ или $T = \pm 2$, $C_1 = \pm 1$, $C_2 = 0$. Таким образом, получены две экстремали $x_1{}^*(t) = -\frac{t^2}{4} + t$, $x_2{}^*(t) = -\frac{t^2}{4} - t$ (см. рис. 6).■

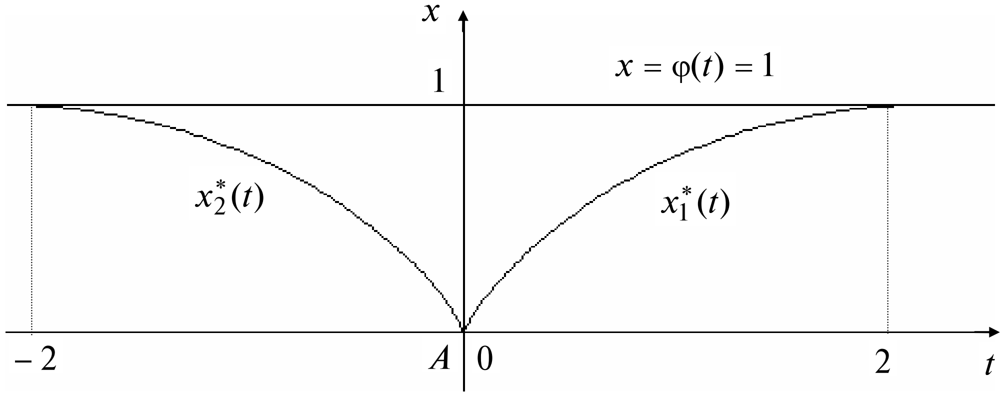

Рис. 6

Пример 4. Найти кривую, на которой функционал

$$I[x(t)] = \int\limits_0^T x'^3(t)\,dt$$

может достигать экстремума, если ее левый конец фиксирован в точке $A(0,0)$, а правый находится на прямой $x(T) = 1 - T$ (рис. 7).

□ 1,2. Так как подынтегральная функция $F = x'^3$ не зависит от t и x явно (второй случай интегрируемости), уравнение Эйлера имеет следующее общее решение: $x(t) = C_1\,t + C_2$.

3. Поскольку правый конец лежит на кривой с уравнением $x = \varphi(t) = 1 - t$, запишем условие трансверсальности:

$$F + (\varphi' - x')F_{x'}\big|_{t=T} = x'^3 - (1 + x')\cdot 3x'^2\big|_{t=T} = -x'^2 \cdot [\,2x' + 3\,]\big|_{t=T} = 0 \quad \text{или}$$

$$x'(T) = 0, \qquad x'(T) = -\frac{3}{2}$$

и граничные условия:

$$x(0) = 0, \qquad x(T) = 1 - T\,.$$

4. Найдем C_1, C_2, T^* из двух систем:

$$x(0) = C_2 = 0\,, \qquad\qquad x(0) = C_2 = 0\,,$$

$$x'(T) = C_1 = 0\,, \qquad\qquad x'(T) = C_1 = -\frac{3}{2}\,,$$

$$x(T) = C_1T + C_2 = 1 - T\,. \qquad\qquad x(T) = C_1T + C_2 = 1 - T\,.$$

Из первой системы находим $C_1 = C_2 = 0$, $T^* = 1$, а из второй $C_1 = -\frac{3}{2}$, $C_2 = 0$, $T^* = -2$. В результате получены две экстремали: $x_1^{\,*}(t) \equiv 0$, $x_2^{\,*}(t) = -\frac{3}{2}t$ (см. рис. 7), на которых может достигаться экстремум функционала.■

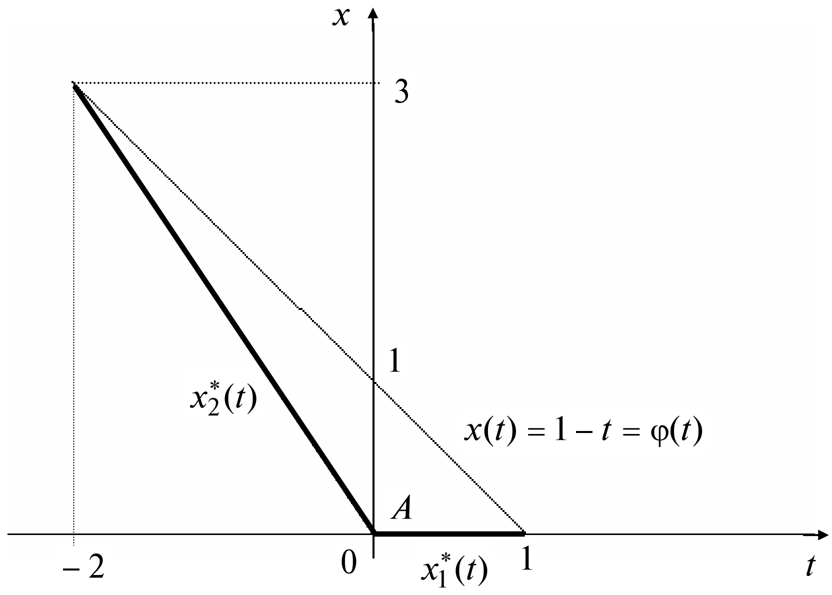

Рис. 7

Пример 5. Найти кривую, на которой функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt$$

может достигать экстремума, если ее левый конец лежит на кривой $x(t) = \psi(t) = t^2 + 2$, а правый конец – на кривой $x(t) = \varphi(t) = t$.

□ 1,2. Так как подынтегральная функция $F = \sqrt{1 + x'^2}$ не зависит явно от t и x, уравнение Эйлера имеет общее решение:

$$x(t) = C_1 t + C_2 .$$

3. Выпишем условия трансверсальности и граничные условия:

$$F + (\psi' - x')F_{x'}\big|_{t=t_0} = \sqrt{1 + x'^2} + (2t - x')\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}}\Big|_{t=t_0} = 0,$$

$$F + (\varphi' - x' F_{x'})\big|_{t=T} = \sqrt{1 + x'^2} + (1 - x')\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}}\Big|_{t=T} = 0,$$

$$x(t_0) = C_1 t_0 + C_2 = \psi(t_0) = t_0^{\,2} + 2,$$

$$x(T) = C_1 T + C_2 = \varphi(T) = T .$$

4. Найдем C_1, C_2, t_0^*, T^*, упростив систему, записанную в п.3 :

$$1 + 2t_0\, x'(t_0) = 1 + 2t_0\, C_1 = 0,$$

$$1 + x'(T) = 1 + C_1 = 0,$$

$$C_1 t_0 + C_2 = t_0^2 + 2,$$

$$C_1 T + C_2 = T.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $t_0^* = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = \dfrac{11}{4}$, $T^* = \dfrac{11}{8}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = -t + \dfrac{11}{4}$.

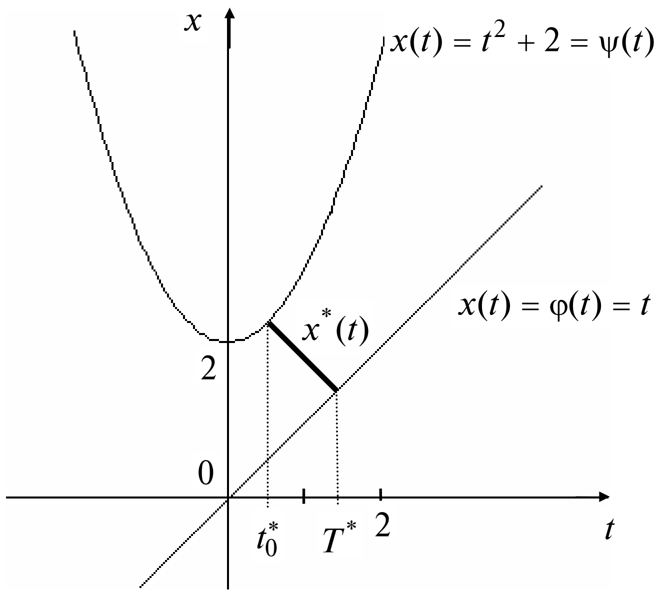

Рис. 8

Геометрический смысл примера состоит в нахождении гладкой кривой минимальной длины, соединяющей две заданные кривые (рис.8). Она определяется величиной функционала $I[x^*(t)] = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{11}{8}} \sqrt{1 + (-1)^2}\, dt = \dfrac{7\sqrt{2}}{8}$. ■