Занятие 13. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 1. Приближенно решить задачу Коши

$$y' = -2y - 3x + 2, \quad y(0) = 0$$

на отрезке $[0; 1]$ с шагом $h = 0{,}1$ различными методами: Эйлера (явным и неявным), предсказания и коррекции второго порядка, Рунге–Кутты четвертого порядка и методом трапеций.

□ Поскольку явный метод Эйлера и метод Рунге–Кутты четвертого порядка относятся к классу ограниченно устойчивых, то для них требуется определить величины критического шага. Сравнивая данное уравнение с тестовым примером, заметим, что $\mu = -2$. Тогда для явного метода Эйлера $h_{кр} = -\dfrac{2}{\mu} = 1$, а для метода Рунге–Кутты $h_{кр} = -\dfrac{2{,}78}{\mu} = 1{,}39$. Следовательно, интегрирование с шагом $h = 0{,}1 < h_{кр}$ обеспечивает устойчивость этих методов.

Явный метод Эйлера. Из общей формулы

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} f(x_i, \hat{y}_i), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad \hat{y}_0 = y_0;$$

получаем расчетную формулу явного метода Эйлера:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + 0{,}1 \cdot (-2\hat{y}_i - 3x_i + 2), \quad \hat{y}_0 = 0, \quad i = \overline{0{,}9};$$

Метод предсказания и коррекции второго порядка.
Шаг «предиктор»:

$$\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)} = \hat{y}_i + h_{i+1} f(x_i, \hat{y}_i) \;,$$

Шаг «корректор»:

$$\hat{y}_{i+1} \equiv \hat{y}_{i+1}^{(К)} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2}[f(x_i, \hat{y}_i) + f(x_i + h_{i+1}, \hat{y}_{i+1}^{(\Pi)})] \;.$$

Отсюда следуют расчетные формулы метода предсказания и коррекции:

$$\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)} = \hat{y}_i + 0{,}1 \cdot (-2\hat{y}_i - 3x_i + 2), \quad \hat{y}_0 = 0, \quad i = \overline{0{,}9};$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{0{,}1}{2}(-2\hat{y}_i - 3x_i + 2 - 2\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)} - 3x_{i+1} + 2); \; \hat{y}_0 = 0, \quad i = \overline{0{,}9};$$

Метод Рунге–Кутты. Из общей формулы

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{6}\left(K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i}\right), \quad \hat{y}_0 = y_0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

где $K_{1,i} = f_i = f(x_i, \hat{y}_i)$, $K_{2,i} = f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} K_{1,i}\right)$,

$$K_{3,i} = f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} K_{2,i}\right), \quad K_{4,i} = f\left(x_i + h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1} \cdot K_{3,i}\right),$$

следуют формулы метода Рунге–Кутты четвертого порядка:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{0{,}1}{6}(K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i}),$$

$$K_{1,i} = -2\hat{y}_i - 3x_i + 2, \quad K_{2,i} = -2 \cdot (\hat{y}_i + 0{,}05 \cdot K_{1,i}) - 3 \cdot (x_i + 0{,}05) + 2;$$

$$K_{3,i} = -2 \cdot (\hat{y}_i + 0{,}05 \cdot K_{2,i}) - 3 \cdot (x_i + 0{,}05) + 2; \quad K_{4,i} = -2 \cdot (x_i + 0{,}1 \cdot K_{3,i}) - 3 \cdot (x_i + 0{,}1) + 2;$$

Неявный метод Эйлера. Из общей формулы

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \equiv \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

получаем расчетную формулу неявного метода Эйлера:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + 0{,}1 \cdot (-2\hat{y}_{i+1} - 3x_{i+1} + 2),$$

откуда
$$\hat{y}_{i+1} = \frac{\hat{y}_i - 0{,}3x_{i+1} + 0{,}2}{1{,}2};$$

Метод трапеций. Из общей формулы

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2}\left[f_i + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})\right] \equiv \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}), \ i = \overline{0, n-1},$$

получаем расчетную формулу метода трапеций:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{0{,}1}{2} \cdot (-2\hat{y}_i - 3x_i + 2 - 2\hat{y}_{i+1} - 3x_{i+1} + 2),$$

откуда

$$\hat{y}_{i+1} = \frac{0{,}9 \cdot \hat{y}_i - \frac{3}{2} \cdot 0{,}1 \cdot x_i + 2 \cdot 0{,}1 - \frac{3}{2} \cdot 0{,}1 \cdot x_{i+1}}{1{,}1}.$$

Очевидно, в данном примере удалось получить явные формулы для нахождения $\hat{y}_{i+1}$ неявным методом Эйлера и методом трапеций лишь в силу линейности решаемого уравнения. В общем случае применяются методы простых итераций или Ньютона.

Точное решение рассматриваемой задачи Коши: $y(x) = 1{,}75 - 1{,}5x - 1{,}75\, e^{-2x}$. Результаты расчетов приведены в табл. 1, в последней строке которой указаны фактические погрешности.

Анализ результатов показывает, что при решении данной задачи метод предсказания и коррекции точнее явного и неявного методов Эйлера, но уступает методу Рунге–Кутты и совсем немного методу трапеций (порядок погрешности одинаков).■

Таблица 1

x_i	Явный метод Эйлера	Неявный метод Эйлера	Метод Рунге–Кутты	Метод предсказания и коррекции	Метод трапеций	$y(x)$
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,200	0,142	0,167	0,165	0,168	0,167
0,2	0,330	0,238	0,277	0,273	0,279	0,277
0,3	0,404	0,287	0,340	0,335	0,342	0,340
0,4	0,433	0,306	0,364	0,359	0,366	0,364
0,5	0,427	0,297	0,356	0,351	0,358	0,356
0,6	0,391	0,264	0,323	0,318	0,325	0,323
0,7	0,333	0,212	0,268	0,264	0,270	0,268
0,8	0,256	0,143	0,197	0,192	0,199	0,197
0,9	0,165	0,061	0,111	0,107	0,112	0,111
1,0	0,062	-0,033	0,013	0,009	0,015	0,013
$\max \varepsilon_i$	0,068	0,059	0,0000104	0,005	0,002	

Пример 2. Найти приближенное решение задачи Коши

$$y' = z - 1, \quad y(0) = 1,$$

$$z' = -y - 2z, \quad z(0) = -1$$

на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0{,}1$ методами Эйлера (неявным и модифицированным), Адамса–Бэшфорта третьего порядка и трапеций.

□ Путем прямой подстановки в систему легко убедиться в том, что точное решение задачи имеет вид $y(x) = -2 + 3e^{-x} + xe^{-x}$; $z(x) = 1 - 2e^{-x} - xe^{-x}$.

Выписываем формулы для нахождения приближенного решения указанными методами (при этом применяется векторная форма записи).

Для неявного метода Эйлера

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \equiv \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

имеем

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{i+1} \\ \hat{z}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_i \\ z_{\ i} \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} \hat{z}_{i+1} - 1 \\ -\hat{y}_{i+1} - 2\hat{z}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_i + 0{,}1 \cdot \hat{z}_{i+1} - 0{,}1 \\ \hat{z}_i - 0{,}1 \cdot \hat{y}_{i+1} - 0{,}2 \cdot \hat{z}_{i+1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \hat{y}_0 = y(0) = 1, \\ \hat{z}_0 = z(0) = -1. \end{matrix}$$

Разрешая эту систему относительно $\hat{y}_{i+1}, \hat{z}_{i+1}$, окончательно получаем

$$\hat{y}_{i+1} = \frac{0{,}1 \cdot (\hat{z}_i - 0{,}1 \cdot \hat{y}_i + 0{,}001)}{1{,}21} - 0{,}1; \qquad \hat{z}_{i+1} = \frac{\hat{z}_i - 0{,}1 \cdot \hat{y}_i + 0{,}01}{1{,}21}.$$

Соотношения

$$\hat{y}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} f(x_i, \hat{y}_i), \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

для модифицированного метода Эйлера принимают вид

$$\hat{y}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{y}_i + \frac{0,1}{2}(\hat{z}_i - 1); \quad \hat{z}_{i+\frac{1}{2}} = z_i + \frac{0,1}{2}(-\hat{y}_i - 2\hat{z}_i);$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + 0,1 \cdot \left(\hat{z}_{i+\frac{1}{2}} - 1 \right); \quad \hat{z}_{i+1} = \hat{z}_i + 0,1 \cdot \left(-\hat{y}_{i+\frac{1}{2}} - 2\hat{z}_{i+\frac{1}{2}} \right).$$

Для метода Адамса–Бэшфорта третьего порядка из

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{12}[23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}], \quad i = \overline{2, n-1};$$

находим

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{0,1}{12}[23 \cdot (\hat{z}_i - 1) - 16 \cdot (\hat{z}_{i-1} - 1) + 5 \cdot (\hat{z}_{i-2} - 1)],$$

$$\hat{z}_{i+1} = \hat{z}_i + \frac{0,1}{12}[23 \cdot (-\hat{y}_i - 2\hat{z}_i) - 16 \cdot (-\hat{y}_{i-1} - 2\hat{z}_{i-1}) + 5 \cdot (-\hat{y}_{i-2} - 2\hat{z}_{i-2})].$$

Для определения «разгонных» точек $(x_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0), (x_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1), (x_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2)$ воспользуемся модифицированным методом Эйлера. Точка $(x_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$ определяется начальными условиями $(0; 1; -1)$.

Выпишем соотношения для метода трапеций

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2}\left[f_i + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \right] \equiv \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}), \; i = \overline{0, n-1},$$

и разрешим их относительно неизвестных:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{i+1} \\ \hat{z}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{z}_i \end{pmatrix} + \frac{0,1}{2}\left[\begin{pmatrix} \hat{z}_i - 1 \\ -\hat{y}_i - 2\hat{z}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{z}_{i+1} - 1 \\ -\hat{y}_{i+1} - 2\hat{z}_{i+1} \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{y}_i + 0,05\hat{z}_i + 0,05\hat{z}_{i+1} - 0,1 \\ -0,05\hat{y}_i - 0,05\hat{y}_{i+1} + 0,9\hat{z}_i - 0,1\hat{z}_{i+1} \end{pmatrix},$$

откуда путем разрешения системы относительно $\hat{y}_{i+1}, \hat{z}_{i+1}$ получаем

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + 0,05\hat{z}_i + 0,05\frac{-0,1\hat{y}_i + 0,8975\hat{z}_i + 0,05}{1,1025} - 0,1;$$

$$\hat{z}_{i+1} = \frac{-0,1\hat{y}_i + 0,8975\hat{z}_i + 0,05}{1,1025}.$$

Результаты проведенных расчетов даны в табл. 2 для $\hat{y}_i, y(x)$ и табл. 3 для $\hat{z}_i, z(x)$ соответственно. Из их анализа вытекает, что наиболее точно величину $\hat{y}_i$ можно рассчитать методом Адамса–Бэшфорта, а величину $\hat{z}_i$ – методом трапеций. ■

Таблица 2

x_i	Неявный метод Эйлера	Модиф. метод Эйлера	Метод Адамса–Бэшфорта	Метод трапеций	Точное решение
0,0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,1	0,80992	0,80500	0,80499	0,80499	0,80500
0,2	0,62960	0,61997	0,61991	0,61991	0,61994
0,3	0,45885	0,44479	0,44469	0,44464	0,44470
0,4	0,29740	0,27924	0,27908	0,279000	0,27909
0,5	0,14500	0,12309	0,12285	0,12273	0,12286
0,6	0,00131	-0,02397	-0,02428	-0,02444	-0,02428
0,7	-0,13397	-0,16224	-0,16265	-0,16284	-0,16263
0,8	-0,26119	-0,29208	-0,29257	-0,29279	-0,29255
0,9	-0,38072	-0,41384	-0,41441	-0,41465	-0,41438
1,0	-0,49287	-0,52787	-0,52853	-0,52879	-0,52848
$\max \varepsilon_i$	0,03720415	0,00067291	0,00005942	0,00033550	-

Таблица 3

x_i	Неявный метод Эйлера	Модиф. метод Эйлера	Метод Адамса–Бэшфорта	Метод трапеций	Точное решение
0,0	-1,00000	-1,00000	-1,00000	-1,00000	-1,00000
0,1	-0,90083	-0,90000	-0,90023	-0,90023	-0,90016
0,2	-0,80316	-0,80095	-0,80132	-0,80132	-0,80121
0,3	-0,70753	-0,70357	-0,70402	-0,70401	-0,70388
0,4	-0,61440	-0,60844	-0,60893	-0,60890	-0,60877
0,5	-0,52408	-0,51601	-0,51650	-0,51645	-0,51632
0,6	-0,43684	-0,42663	-0,42709	-0,42702	-0,42691
0,7	-0,35287	-0,34054	-0,34095	-0,34087	-0,34078
0,8	-0,27229	-0,25794	-0,25828	-0,25818	-0,25812
0,9	-0,19518	-0,17894	-0,17920	-0,17908	-017905
1,0	-0,12158	-0,10357	-0,10378	-0,10364	-0,10364
$\max \varepsilon_i$	0,01958133	0,00032586	0,00012145	0,00003005	-