Занятие 6. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

Часть I. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

А. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Пусть на множестве $\Omega = [a, b]$ задана сетка $\Omega_n = \left\{x_i,\, i = \overline{0, n}\right\}$, определяемая $n+1$ точкой $x_0, x_1, \ldots, x_n$, а на сетке задана сеточная функция $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$:

$$y_0 = f(x_0),\, y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n),$$

где $x_i \in [a, b] = [x_0, x_n]$ - в общем случае неравноотстоящие узлы, определяемые шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ($h_{i+1} = \mathrm{var}$), $i = \overline{0, n-1}$.

Требуется найти многочлен *n-й степени*, проходящий через все заданные точки.

Интерполяционный многочлен Лагранжа n-й степени имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})\cdot(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdot(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} f_i\, .$$

Многочлен $L_n(x)$ является многочленом степени n и удовлетворяет условиям интерполяции: $L_n(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$.

Для записи интерполяционного многочлена Лагранжа удобно пользоваться табл.1.

Таблица 1

$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	...	$x_0 - x_n$	D_0	f_0
$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_1 - x_n$	D_1	f_1
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	...	$x_2 - x_n$	D_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	...	$x - x_n$	D_n	f_n
$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$					D_i	f_i

Здесь D_i – произведение элементов i-й строки, $\Pi_{n+1}(x)$ – произведение элементов главной диагонали.

Тогда многочлен Лагранжа может быть записан в форме

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{D_i}.$$

Б. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НЬЮТОНА

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН НЬЮТОНА ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ

Пусть исходная (интерполируемая) сеточная функция $y_i = f\left(x_i\right) = f_i,\quad i = \overline{0,n}$, задана на неравномерной сетке $\Omega_n \equiv \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, характеризующейся шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i = \mathrm{var}$.

Выбрав внутри неравномерной сетки соответствующие шаблоны интерполяции $(x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), ..., (x_i, x_{i+1}, .., x_{i+k})$, введем следующие определения *разделенных разностей*:

– *разделенная разность нулевого порядка*: $f(x_i) = f_i$;

– *разделенная разность первого порядка*: $f(x_i, x_{i+1}) = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$;

– *разделенная разность второго порядка*:
$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i};$$

– *разделенная разность k-го порядка*:
$$f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i};$$

– *разделенная разность n-го порядка в узле* x_0:
$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_0, x_1, ..., x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона n-й степени имеет вид
$$N_n(x) = f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... +$$
$$+ f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}).$$

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НЬЮТОНА ДЛЯ РАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ

Пусть исходная (интерполируемая) сеточная функция $y_i = f\left(x_i\right) = f_i,\quad i = \overline{0,n}$, задана на равномерной сетке $\Omega_n \equiv \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, характеризующейся шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i = h = \mathrm{const}$.

Выбрав внутри равномерной сетки соответствующие шаблоны интерполяции $(x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), ..., (x_i, x_{i+1}, .., x_{i+k})$, введем следующие определения *конечных разностей*:

– *конечная разность нулевого порядка*: f_i;

– *конечная разность первого порядка*: $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$;

– *конечная разность второго порядка*: $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$;

– *конечная разность* k *-го порядка*: $\Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i) = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f_{i+j}$,

где $C_k^j = \dfrac{k!}{(k-j)!\,j!}$;

– *конечная разность* n *-го порядка в узле* x_0: $\Delta^n f_0 = \Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0$.

Интерполяционный многочлен Ньютона n *-го порядка* имеет вид

$$N_n^{(I)}(q) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} q(q-1)\ldots(q-n+1),$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ - *фаза интерполяции относительно точки* x_0.

Пример 1. Требуется:

а) найти интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени для сеточной функции, заданной табл. 2. Вычислить значение функции в точке $x_* = 2{,}5$;

б) найти интерполяционный многочлен Ньютона третьей степени для сеточной функции, заданной табл. 2.

Таблица 2

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
$f(x_i) = f_i$	7	5	8	7

□ 1. Составим многочлен Лагранжа. Для этого заполним табл. 3, соответствующую табл. 1.

Таблица 3

$x-2$	-1	-2	-3	$-6\cdot(x-2)$	7
1	$x-3$	-1	-2	$2\cdot(x-3)$	5
2	1	$x-4$	-1	$-2\cdot(x-4)$	8
3	2	1	$x-5$	$6\cdot(x-5)$	7
$\Pi_4(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$				D_i	f_i

Получаем:

$$L_3(x) = \Pi_4(x)\sum_{i=0}^{3}\frac{f_i}{D_i} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdot 7}{-6\cdot(x-2)} + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdot 5}{2\cdot(x-3)} +$$

$$+\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdot 8}{-2\cdot(x-4)} + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdot 7}{6\cdot(x-5)} =$$

$$= -\frac{7}{6}\cdot(x-3)(x-4)(x-5)+\frac{5}{2}\cdot(x-2)(x-4)(x-5)-4\cdot(x-2)(x-3)(x-5)+$$

$$+\frac{7}{6}\cdot(x-2)(x-3)(x-4) = -\frac{3}{2}x^3+16x^2-\frac{107}{2}x+62.$$

2. Вычислим значение функции в заданной точке: $L_3(2{,}5)=4{,}8125$. ■

Составим многочлен Ньютона, справедливый *для произвольного расположения узлов*. Для этого сформируем табл. 4.

Таблица 4

x_i	f_i	$f(x_j,x_{j+1})$	$f(x_j,x_{j+1},x_{j+2})$	$f(x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3})$
2	7			
		-2		
3	5		$\frac{5}{2}$	
		3		$-\frac{3}{2}$
4	8		-2	
		-1		
5	7			

$$f(x_0,x_1)=\frac{5-7}{3-2}=-2;\qquad f(x_1,x_2)=\frac{8-5}{4-3}=3;\qquad f(x_2,x_3)=\frac{7-8}{5-4}=-1;$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{3-(-2)}{4-2}=\frac{5}{2};\quad f(x_1,x_2,x_3)=\frac{-1-3}{5-3}=-2;$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{-2-\frac{5}{2}}{5-2}=-\frac{3}{2}.$$

Для $n=3$ имеем

$$N_3(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)\,f(x_0,x_1,x_2)+$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,f(x_0,x_1,x_2,x_3)=7+(x-2)\cdot(-2)+(x-2)\cdot(x-3)\cdot\frac{5}{2}+$$

$$+(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}x^3+16x^2-\frac{107}{2}x+62.$$

Поскольку в данной задаче заданы *равностоящие узлы*, воспользуемся также формулой для первого интерполяционного многочлена Ньютона:

$$N_3^{(I)}(q)=f(x_0)+\frac{\Delta f_0}{1!}q+\frac{\Delta^2 f_0}{2!}q\cdot(q-1)+\frac{\Delta^3 f_0}{3!}q\cdot(q-1)\cdot(q-2),$$

где $q=\dfrac{x-x_0}{h}=\dfrac{x-2}{1}=x-2$.

Составим табл. 5.

Таблица 5

x_i	$f_i = f(x_i)$	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$
2	7			
		-2		
3	5		5	
		3		-9
4	8		-4	
		-1		
5	7			

Имеем: $\Delta f_0 = 5-7=-2$; $\Delta f_1 = 8-5=3$; $\Delta f_2 = 7-8=-1$; $\Delta^2 f_0 = 3-(-2)=5$;

$\Delta^2 f_1 = -1-3=-4$; $\Delta^3 f_0 = -4-5=-9$. Поэтому

$$N_3^{(I)}(x) = 7 + \frac{(-2)}{1!}q + \frac{5}{2!}q\cdot(q-1) + \frac{(-9)}{3!}q\cdot(q-1)\cdot(q-2) = -\frac{3}{2}q^3 + 7q^2 - \frac{15}{2}q + 7\Bigg|_{q=\frac{x-2}{1}} =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot(x^3-6x^2+12x-8) + 7\cdot(x^2-4x+4) - \frac{15}{2}\cdot(x-2) + 7 = -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62.$$

Часть II. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

ТОЧЕЧНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Методика решения задачи сглаживания

Шаг 1. Записать систему:

$$\begin{aligned} s_0a_0 + s_1a_1 + \ldots + s_ma_m &= t_0, \\ s_1a_0 + s_2a_1 + \ldots + s_{m+1}a_m &= t_1, \\ &\vdots \\ s_ma_0 + s_{m+1}a_1 + \ldots + s_{2m}a_m &= t_m. \end{aligned} \tag{*}$$

где

$$s_0 = n+1, \quad t_0 = f_0 + f_1 + \ldots + f_n,$$

$$s_k = x_0^k + x_1^k + \ldots + x_n^k, \ k = 1,\ldots,2m;$$

$$t_k = x_0^k f_0 + x_1^k f_1 + \ldots + x_n^k f_n, \ k = 1,\ldots,m.$$

Шаг 2. Решить полученную систему одним из методов решения СЛАУ и найти коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Шаг 3. Записать искомую сглаживающую функцию

$$f_m(x,\overline{a}) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m.$$

Пример 2. Решить задачу аппроксимации сеточной функции, заданной табл. 6, при $m = 1$ и $m = 2$.

Таблица 6

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
$f(x_i) = f_i$	7	5	8	7

□ Пусть степень многочлена $m = 1$, тогда решение ищется в виде

$$f_1(x,\overline{a}) = a_0 + a_1 x .$$

1. Для составления системы (*):

$$s_0 a_0 + s_1 a_1 = t_0 ,$$
$$s_1 a_0 + s_2 a_1 = t_1$$

найдем ее коэффициенты s_0, s_1, s_2. Расчеты поместим в табл. 7, где в последней числовой строке находятся коэффициенты системы.

Таблица 7

x_i	f_i	1	x_i^2	$x_i f_i$
2	7	1	4	14
3	5	1	9	15
4	8	1	16	32
5	7	1	25	35
14	27	4	54	96
s_1	t_0	s_0	s_2	t_1

В результате получаем

$$4a_0 + 14a_1 = 27 ,$$
$$14a_0 + 54a_1 = 96 .$$

2. Решение системы: $a_0 = 5{,}7$; $a_1 = 0{,}3$.

3. Искомая сглаживающая функция имеет вид $f_1(x,\overline{a}) = 5{,}7 + 0{,}3x$, а среднеквадратичная погрешность $\delta_1(\overline{a}) = 1{,}0368$.

Пусть $m = 2$, тогда решение ищется в виде

$$f_2(x,\overline{a}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 .$$

1. Составим систему (*):

$$s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 = t_0 ,$$
$$s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 = t_1 ,$$
$$s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 = t_2 .$$

Расчеты коэффициентов системы приведены в табл. 8.

Таблица 8

x_i	f_i	1	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
2	7	1	4	8	16	14	28
3	5	1	9	27	81	15	45
4	8	1	16	64	256	32	128
5	7	1	25	125	625	35	175
14	27	4	54	224	978	96	376
s_1	t_0	s_0	s_2	s_3	s_4	t_1	t_2

В результате получаем систему

$$4a_0 + 14a_1 + 54a_2 = 27,$$
$$14a_0 + 54a_1 + 224a_2 = 96,$$
$$54a_0 + 224a_1 + 978a_2 = 376.$$

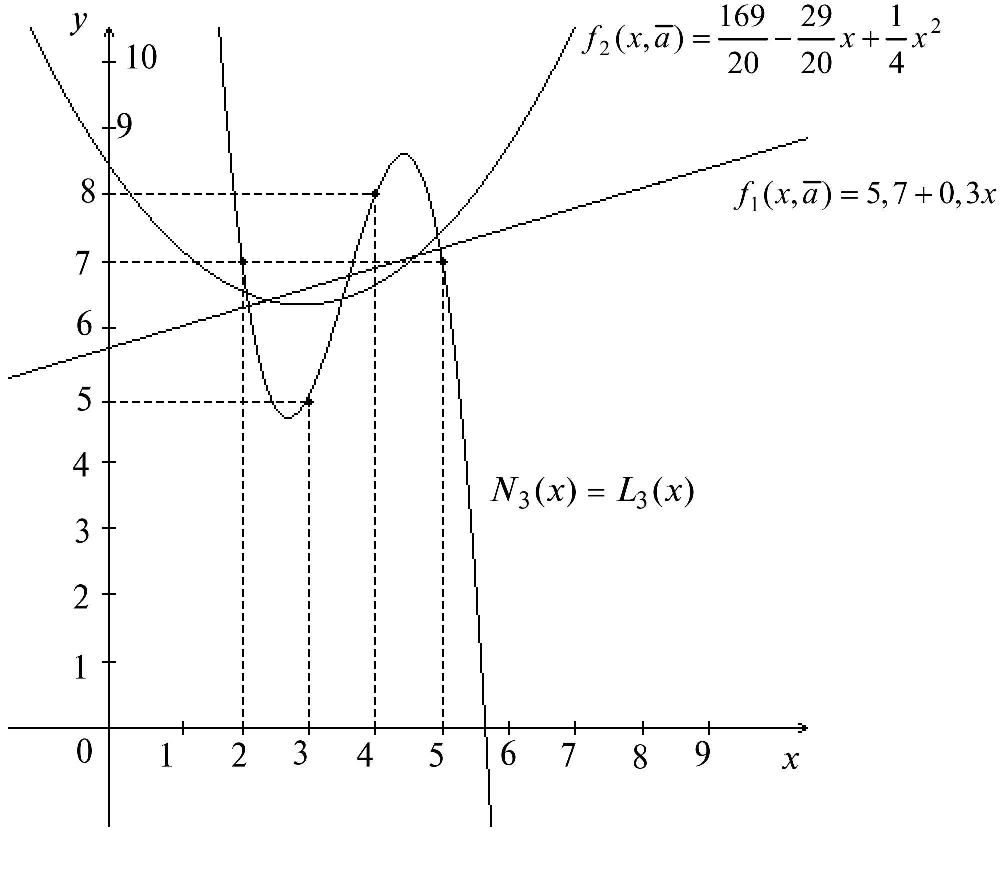

Рис. 1

2. Решаем полученную систему методом Гаусса.

Прямой ход:

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 14 & 54 & 27 \\ 14 & 54 & 224 & 96 \\ 54 & 224 & 978 & 376 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{27}{2} & \frac{27}{4} \\ 0 & \boxed{5} & 35 & 1{,}5 \\ 0 & 35 & 249 & 11{,}5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{27}{2} & \frac{27}{4} \\ 0 & 1 & 7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{27}{2} & \frac{27}{4} \\ 0 & 1 & 7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Обратный ход:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{27}{2} \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{4} \\ 0{,}3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} a_0 + \tfrac{7}{2} a_1 + \tfrac{27}{2} a_2 &= \tfrac{27}{4}, \\ a_1 + 7a_2 &= 0{,}3, \\ a_2 &= \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда $a_2 = \dfrac{1}{4}, \quad a_1 = \dfrac{3}{10} - 7 \cdot \dfrac{1}{4} = -\dfrac{29}{20},$

$$a_0 = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} a_2 - \frac{7}{2} a_1 = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{29}{20}\right) = \frac{169}{20}.$$

3. Искомая сглаживающая функция $f_2(x, \overline{a}) = \dfrac{169}{20} - \dfrac{29}{20} x + \dfrac{1}{4} x^2$, а среднеквадратичная погрешность $\delta_2(\overline{a}) = 1{,}0062$.

На рис. 1 изображены заданная сеточная функция, сглаживающие многочлены при $m = 1$ и $m = 2$, а также интерполяционный многочлен (при этом $m = 3$).

Заметим, что если степень многочлена $m = 0$, то решение ищется в виде

$$f_0(x, \overline{a}) = a_0.$$

Для составления уравнения $s_0 a_0 = t_0$, следующего из (*), используем коэффициенты s_0, t_0 (табл. 8). В результате получим $4a_0 = 27$, или $a_0 = \dfrac{27}{4} = 6{,}75$. Искомая сглаживающая функция имеет вид $f_0(x, \overline{a}) = 6{,}75$, а среднеквадратическая погрешность $\delta_0(\overline{a}) = 1{,}0897$. При увеличении числа m среднеквадратичная погрешность уменьшается: $\delta_0(\overline{a}) > \delta_1(\overline{a}) > \delta_2(\overline{a})$. При $m = 3$ среднеквадратичная погрешность $\delta_3(\overline{a})$ равна нулю, так как многочлен проходит через все заданные точки. ■