Занятие 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается проблема решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), записываемых в виде

$$Ax = b \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ – действительная матрица размеров $(n \times n)$, i, j – переменные, соответствующие номерам строк и столбцов (целые числа); $b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in R^n$ – вектор-столбец размеров $(n \times 1)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$ – вектор-столбец неизвестных, R^n – n-мерное евклидово пространство, верхний индекс "T" здесь и далее обозначает операцию транспонирования.

Требуется найти решение $x_* = (x_{*1}, \ldots, x_{*n})^T \in R^n$ системы, подстановка которого в систему приводит к верному равенству $A x_* = b$.

А. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Методика решения задачи

Шаг 1. Преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$ одним из описанных способов.

Шаг 2. Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)} = \beta$, а также малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить следующее приближение $x^{(k+1)}$ по формуле

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta \ .$$

Шаг 4. Если выполнено условие окончания $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon$, процесс завершить и положить $x_* \cong x^{(k+1)}$. Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к п.3.

Пример 1. Методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13. \end{aligned}$$

□ 1. Так как $|2|<|2|+|10|$, $|1|<|10|+|1|$, $|1|<|2|+|10|$, условие преобладания диагональных элементов не выполняется. Переставим уравнения местами так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов:

$$10x_1+x_2+x_3=12,$$
$$2x_1+10x_2+x_3=13,$$
$$2x_1+2x_2+10x_3=14.$$

Получаем $|10|>|1|+|1|$, $|10|>|2|+|1|$, $|10|>|2|+|2|$. Выразим из первого уравнения x_1, из второго x_2, из третьего x_3:

$$\begin{aligned} x_1&=-0{,}1\cdot x_2-0{,}1\cdot x_3+1{,}2,\\ x_2&=-0{,}2\cdot x_1-0{,}1\cdot x_3+1{,}3,\\ x_3&=-0{,}2\cdot x_1-0{,}2\cdot x_2+1{,}4;\end{aligned}\qquad \alpha=\begin{pmatrix}0&-0{,}1&-0{,}1\\-0{,}2&0&-0{,}1\\-0{,}2&-0{,}2&0\end{pmatrix};\quad \beta=\begin{pmatrix}1{,}2\\1{,}3\\1{,}4\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|\alpha\|_1=\max\{0{,}2;0{,}3;0{,}4\}=0{,}4<1$, следовательно, условие сходимости (теорема) выполнено.

2. Зададим $x^{(0)}=\beta=\begin{pmatrix}1{,}2\\1{,}3\\1{,}4\end{pmatrix}$. В поставленной задаче $\varepsilon=0{,}01$.

3. Выполним расчеты по формуле $x^{(k+1)}=\alpha x^{(k)}+\beta$:

$$x^{(k+1)}=\begin{pmatrix}0&-0{,}1&-0{,}1\\-0{,}2&0&-0{,}1\\-0{,}2&-0{,}2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1{,}2\\1{,}3\\1{,}4\end{pmatrix},\quad k=0{,}1{,}\ldots,$$

или

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)}&=-0{,}1x_2^{(k)}-0{,}1x_3^{(k)}+1{,}2;\\ x_2^{(k+1)}&=-0{,}2x_1^{(k)}-0{,}1x_3^{(k)}+1{,}3;\quad k=0{,}1{,}\ldots,\\ x_3^{(k+1)}&=-0{,}2x_1^{(k)}-0{,}2x_2^{(k)}+1{,}4;\end{aligned}$$

до выполнения условия окончания и результаты занесем в табл. 1.

Таблица 1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|_1$
0	1,2000	1,3000	1,4000	-
1	0,9300	0,9200	0,900	0,5
2	1,0180	1,0240	1,0300	0,13
3	0,9946	0,9934	0,9916	0,0384
4	1,0015	1,0020	1,0024	0,0108
5	0,9996	0,9995	0,9993	0,0027<ε

4. Расчет закончен, поскольку условие окончания $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| = 0{,}0027 < \varepsilon$ выполнено.

Приближенное решение задачи: $x_* \cong (0{,}9996\,;0{,}9995\,;0{,}9993)^T$. Очевидно, точное решение: $x_* = (1\,;1\,;1)^T$.

Б. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Методика решения задачи

Шаг 1. Преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$ одним из описанных способов.

Шаг 2. Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)} = \beta$, а также малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

Шаг 3. Произвести расчеты по формуле

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \alpha_{11} x_1^{(k)} + \alpha_{12} x_2^{(k)} + \alpha_{13} x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n} x_n^{(k)} + \beta_1,\\
x_2^{(k+1)} &= \alpha_{21} \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{22} x_2^{(k)} + \alpha_{23} x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n} x_n^{(k)} + \beta_2,\\
x_3^{(k+1)} &= \alpha_{31} \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{32} \boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{33} x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{3n} x_n^{(k)} + \beta_3,\\
&\vdots\\
x_n^{(k+1)} &= \alpha_{n1} \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{n2} \boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{n3} \boxed{x_3^{(k+1)}} + \ldots + \alpha_{nn-1} \boxed{x_{n-1}^{(k+1)}} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n.
\end{aligned}
\tag{*}
$$

(в каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений, что показано в записи стрелками)
или

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + \beta,$$

где L, U являются разложениями матрицы α:

$$
L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad
U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.
$$

и найти $x^{(k+1)}$.

Шаг 4. Если выполнено условие окончания $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon$, процесс завершить и положить $x_* \cong x^{(k+1)}$. Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к п.3.

Пример 2. Методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14,$$
$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$
$$2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13.$$

□ 1. Приведем систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$ так же, как в примере 1:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0{,}1 \cdot x_2 - 0{,}1 \cdot x_3 + 1{,}2, \\ x_2 &= -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}1 \cdot x_3 + 1{,}3, \\ x_3 &= -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 + 1{,}4; \end{aligned} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Так как $\|\alpha\|_1 = \max\{0{,}2\,;0{,}3\,;0{,}4\} = 0{,}4 < 1$, условие сходимости выполняется.

2. Зададим $x^{(0)} = (1{,}2; 0; 0)^T$. В поставленной задаче $\varepsilon = 0{,}001$.

3. Выполним расчеты по формуле (*):

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0{,}1x_2^{(k)} - 0{,}1x_3^{(k)} + 1{,}2; \\ x_2^{(k+1)} &= -0{,}2x_1^{(k+1)} - 0{,}1x_3^{(k)} + 1{,}3; \qquad k = 0,1,\ldots, \\ x_3^{(k+1)} &= -0{,}2x_1^{(k+1)} - 0{,}2x_2^{(k+1)} + 1{,}4; \end{aligned}$$

и результаты занесем в табл. 2.

Таблица 2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_1$
0	1,2000	0	0	-
1	1,2000	1,0600	0,9480	1,0600
2	0,9992	1,0054	0,9991	0,1008
3	0,9996	1,0002	1,0000	0,0052
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,0004<ε

Очевидно, найденное решение $x_* = (1\,;1\,;1)^T$ является точным.

4. Расчет завершен, поскольку условие окончания $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| = 0{,}0004 < \varepsilon$ выполнено.■

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0, \tag{*}$$

где $f(x)$ – функция, определенная и непрерывная на некотором промежутке.

Этапы решения нелинейных уравнений

Первый этап. Находятся отрезки $[a_i, b_i]$, внутри каждого из которых содержится один простой или кратный корень ($x_{*i} \in [a_i, b_i]$). Этот этап называется процедурой *отделения корней*. По сути, на нем осуществляется грубое нахождение корней x_{*i}.

Второй этап. Грубое значение каждого корня x_{*i} уточняется до заданной точности одним из численных методов, в которых реализуются последовательные приближения.

А. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Методика решения задачи

Шаг 1. Уравнение $f(x) = 0$ равносильным преобразованием привести к виду $x = \varphi(x)$. Это преобразование может быть осуществлено различными путями, но для сходимости нужно обеспечить выполнение условия $|\varphi'(x)| \le \chi < 1$ (χ – некоторая константа). При этом задача сводится к нахождению абсциссы точки пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$ (рис. 1).

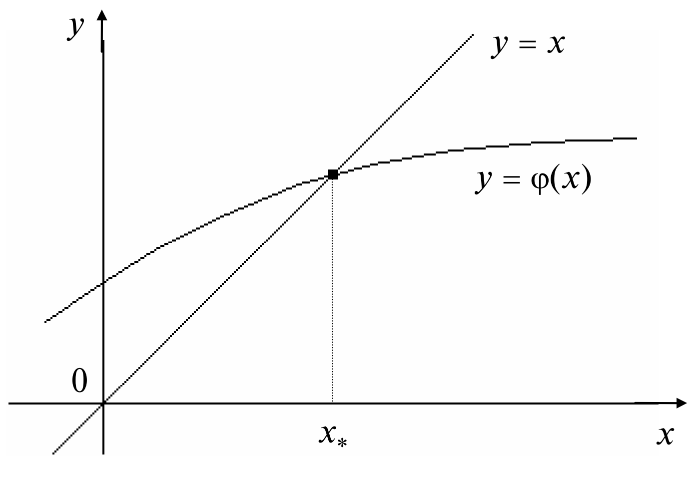

Рис. 1

Шаг 2. Задать начальное приближение $x^{(0)} \in [a, b]$ и малое положительное число ε. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить следующее приближение:

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) .$$

Шаг 4. Если $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \le \varepsilon$, итерации завершаются и $x_* \cong x^{(k+1)}$. Если $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к п.3.

Способы преобразования уравнения

Преобразование уравнения $f(x) = 0$ к равносильному виду $x = \varphi(x)$ может быть выполнено неоднозначно.

1. Можно заменить уравнение $f(x) = 0$ на равносильное $x = x + cf(x)$, где $c = \mathrm{const} \ne 0$. Тогда, принимая правую часть этого уравнения за $\varphi(x)$ и раскрывая $|\varphi'(x)| = |1 + cf'(x)| < 1$, получаем условие $-2 < cf'(x) < 0$.

2. Можно выразить x из уравнения $f(x) = 0$ так, чтобы для полученного уравнения $x = \varphi(x)$ выполнялось условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$ в окрестности искомого корня.

Пример 1. Найти решение уравнения $x^3 - x + 1 = 0$ методом простых итераций с точностью $\varepsilon_1 = 0{,}01$ и $\varepsilon_2 = 0{,}001$.

□ I. Отделим корень уравнения. Уравнение имеет три корня, среди которых по крайней мере один действительный, поскольку это уравнение нечетной степени.

Преобразуем уравнение к равносильному виду: $x^3 = x - 1$ и найдем точки пересечения графиков $y = x^3$ и $y = x - 1$ (рис. 2).

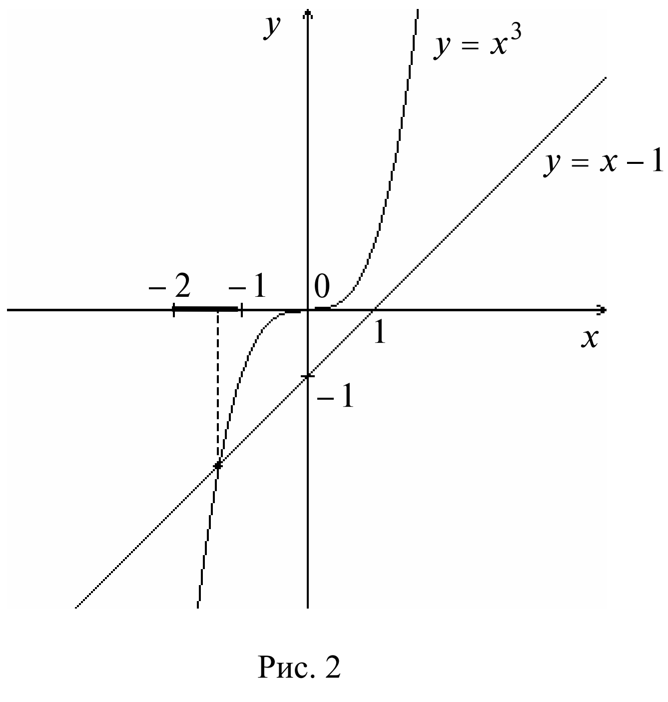

Рис. 2

Очевидно, корень уравнения $x_* \in [-2; -1]$.

II. Преобразуем уравнение к виду $x = \varphi(x)$. Для этого запишем его сначала в форме $x = x^3 + 1$. Легко показать, что функция $\varphi(x) = x^3 + 1$ не удовлетворяет условию сходимости, поскольку $\varphi'(x) = 3x^2$, $\varphi'(-2) = 12 > 1$, $\varphi'(-1) = 3 > 1$. Поэтому воспользуемся другим преобразованием.

В результате получим $x = \sqrt[3]{x-1}$. Можно проверить, что $|\varphi'(x)| < 1$ на отрезке $[-2; -1]$, т.е. достаточные условия сходимости выполняются.

2. Зададим начальное приближение $x^{(0)} = -1$. Решим задачу с различной точностью ε_1 и ε_2 .

3,4. Выполним расчеты по формуле:

$$x^{(k+1)} = \sqrt[3]{x^{(k)} - 1},\ k = 0,1,2,...$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

k	0	1	2	3	4	5
$x^{(k)}$	-1,000	-1,2599	-1,3123	-1,3223	-1,3243	-1,3246
$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$	-	0,2599	0,0524	0,0100	0,0020	0,0003

Если $\varepsilon_1 = 0{,}01$, то $x_* \cong -1{,}3223$, а если $\varepsilon_2 = 0{,}001$, то $x_* \cong -1{,}3246$.■

Пример 2. Найти корни уравнения $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

□ I. Отделить корни уравнения $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$. Уравнение имеет три корня, среди которых по крайней мере один действительный.

Преобразуем уравнение к равносильному виду: $x^3 = x^2 + 9x - 9$. Найдем абсциссы точек пересечения графиков $y = x^3$ и $y = x^2 + 9x - 9$ (на рис. 2 указаны два из трех полученных промежутков).

Результат отделения корней – три промежутка $[0{,}5;\ 2]$, $[2;\ 4]$, $[-4;\ -2]$. Заметим, что отрезки могут быть сужены, например, вместо отрезка $[2; 4]$ можно принять $[2{,}5; 4]$.

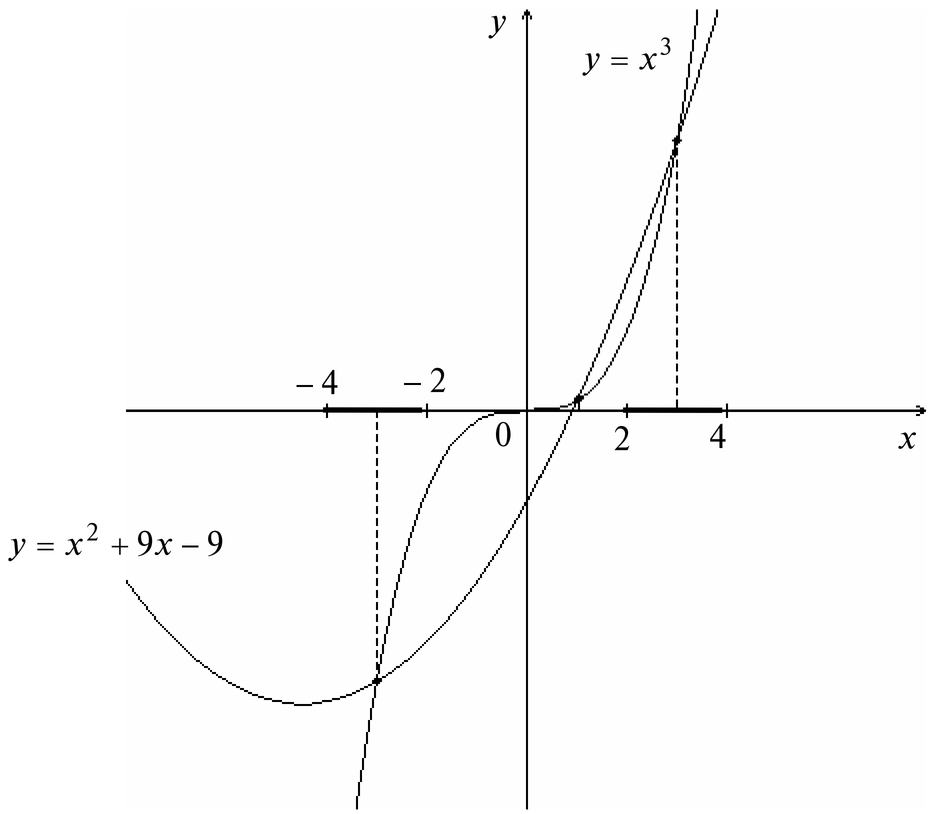

Рис. 3

II. Преобразуем уравнение к виду $x = \varphi(x)$: $x = \sqrt[3]{x^2 + 9x - 9}$.

Можно показать, что на отрезках $[2; 4]$, $[-4; -2]$ функция $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2 + 9x - 9}$ удовлетворяет условию $|\varphi'(x)| < 1$. На отрезке $[0{,}5; 2]$ используем другой вид уравнения: $x = \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x^2}{9} + 1$. Также легко проверить, что функция $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x^2}{9} + 1$ удовлетворяет достаточному условию сходимости на отрезке $[0{,}5; 2]$.

2. В качестве начальных приближений выберем:

– точку $x^{(0)} = -2$ на отрезке $[-4; -2]$;

– точку $x^{(0)} = 0{,}5$ на отрезке $[0{,}5; 2]$;

– точку $x^{(0)} = 2$ на отрезке $[2; 4]$.

В поставленной задаче $\varepsilon = 0{,}001$.

3,4. Выполним расчеты по формуле

$$x^{(k+1)} = \sqrt[3]{\left(x^{(k)}\right)^2 + 9x^{(k)} - 9}, \ k = 0,1,2,\ldots,$$

с начальными значениями $x^{(0)} = -2$ и $x^{(0)} = 2$ и по формуле

$$x^{(k+1)} = \frac{\left(x^{(k)}\right)^3}{9} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{9} + 1, \ k = 0,1,2,\ldots,$$

с начальным значением $x^{(0)} = 0{,}5$. Результаты расчетов занесены в табл. 2-4.

Таблица 2

k	$x^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$
0	2,0000	-
1	2,3513	0,3513
2	2,6056	0,2543
3	2,7694	0,1638
4	2,8682	0,0988
5	2,9255	0,0573
6	2,9582	0,0327
7	2,9767	0,0185
8	2,9870	0,0102
9	2,9927	0,0057
10	2,9959	0,0032
11	2,9977	0,0018
12	2,9987	0,0010

Таблица 3

k	$x^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$
0	-2,0000	-
1	-2,8438	0,8438
2	-2,9816	0,1378
3	-2,9979	0,0163
4	-2,9997	0,0018
5	-2,99997	0,00027

Таблица 4

k	$x^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$
0	0,50000	-
1	0,98611	0,4861
2	0,99849	0,01238
3	0,99983	0,00134
4	0,99998	0,00015

В результате получены приближенные значения корней: $x_{1*} \cong -2{,}99997$, $x_{2*} \cong 0{,}99998$, $x_{3*} \cong 2{,}9987$.

Обратим внимание на сильное различие в числе итераций, потребовавшихся для нахождения корней $x_* = 3$ (табл. 2) и $x_* = -3$ (табл. 3), с помощью одной и той же формулы. Заметим, что в окрестности корня $x_* = 3$ значения модуля производной функции $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2 + 9x - 9}$ равны: $|\varphi'(2)| = 0{,}784$; $|\varphi'(2{,}3513)| = 0{,}673$; $|\varphi'(2{,}6056)| = 0{,}618$; $|\varphi'(2{,}9977)| = 0{,}556$. С другой стороны, в окрестности корня $x_* = -3$ имеем: $|\varphi'(-2)| = 0{,}206$; $|\varphi'(-2{,}8438)| = 0{,}124$; $|\varphi'(-2{,}9977)| = 0{,}111$. Анализ результатов показывает, что чем меньше значения модуля производной $|\varphi'(x)|$, тем быстрее сходимость. ■

Б. МЕТОД НЬЮТОНА

Метод Ньютона (*метод касательных*) является одним из наиболее популярных численных методов. Он реализуется по формуле:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0,1,2,...$$

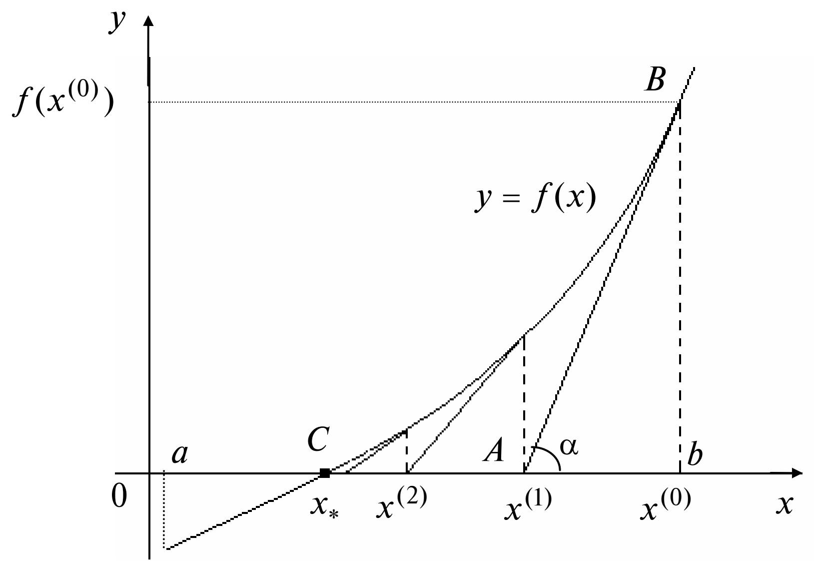

Рис. 4

В точке $x^{(0)}$ строится касательная к графику функции. Следующей точкой $x^{(1)}$ является точка пересечения касательной с осью абсцисс. Далее процесс продолжается аналогично.

Теорема (о достаточных условиях сходимости метода Ньютона).
Пусть выполняются следующие условия:

1. Функция $f(x)$ *определена и дважды дифференцируема на* $[a,b]$.

2. Отрезку $[a,b]$ *принадлежит только один простой корень* x_*, *так что* $f(a)\cdot f(b) < 0$.

3. Производные $f'(x), f''(x)$ *на* $[a,b]$ *сохраняют знак, и* $f'(x) \neq 0$.

4. Начальное приближение $x^{(0)}$ *удовлетворяет неравенству* $f(x^{(0)})\cdot f''(x^{(0)}) > 0$ *(знаки функций* $f(x)$ *и* $f''(x)$ *в точке* $x^{(0)}$ *совпадают).*

Тогда с помощью метода Ньютона можно вычислить корень уравнения $f(x) = 0$ *с любой точностью.*

Методика решения задачи

Шаг 1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ так, чтобы выполнялось неравенство $f(x^{(0)}) \cdot f''(x^{(0)}) > 0$, а также малое положительное число ε. Положить $k = 0$.

Шаг 2. Вычислить $x^{(k+1)}$ по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Шаг 3. Если $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \le \varepsilon$, процесс завершить и положить $x_* \cong x^{(k+1)}$.

Если $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к п.2.

Пример 3. Методом Ньютона найти корень уравнения $x^3 - x + 1 = 0$.

□ В примере 1 корень был отделен: $x_* \in [-2; -1]$.

1. Зададим начальное приближение $x^{(0)}$. Так как $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$, то $f(-2) = -5$, $f''(x) < 0$ при $x \in [-2; -1]$. Поэтому $f(-2)f''(-2) > 0$ и $x^{(0)} = -2$. Положим $\varepsilon = 0{,}001$.

2,3. Результаты расчетов по формуле:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^3 - x^{(k)} + 1}{3\left(x^{(k)}\right)^2 - 1},\ k = 0,1,\ldots,$$

приведены в табл. 5.

Таблица 5

k	0	1	2	3	4	5
$x^{(k)}$	-2,0000	-1,545455	-1,359615	-1,325801	-1,324719	-1,324718
$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$	-	0,454545	0,185840	0,033814	0,001082	0,000001

Найденное приближенное решение $x_* \cong -1{,}32472$. ■

Пример 4. Найти корни уравнения

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$$

методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

□ Процедура отделения корней была выполнена в примере 2. В качестве отрезков $[a_i, b_i]$, которым принадлежат корни уравнения, выберем $[-4; -2]$, $[2{,}5; 4]$, $[0{,}5; 2]$.

Так как $f(-4) = -3{,}5$; $f(-2) = 15$, т.е. $f(-4)f(-2) < 0$, производные $f''(x) = 6x - 2 < 0$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 9 > 0$ сохраняют знак при $x \in [-4; -2]$, то условия сходимости выполняются.

Так как $f(2{,}5) = -4{,}125$; $f(4) = 21$, т.е. $f(2{,}5)f(4) < 0$, и производные $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ сохраняют знак при $x \in [2{,}5;\ 4]$, то условия сходимости на этом отрезке тоже выполняются.

Так как $f(0{,}5) = 4{,}375$; $f(2) = -5$, т.е. $f(0{,}5)f(2) < 0$, и производные $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ сохраняют знак при $x \in [0{,}5;\ 2]$, то условия сходимости выполняются.

1. Зададим начальные приближения: на отрезке $[0{,}5;\ 2]$ выберем $x^{(0)} = 0{,}5$, так как $f(0{,}5) \cdot f''(0{,}5) > 0$; на отрезке $[-4, -2]$ выберем $x^{(0)} = -4$, так как $f(4) \cdot f''(4) > 0$; аналогично на отрезке $[2{,}5;\ 4]$ выберем $x^{(0)} = 4$. В поставленной задаче $\varepsilon = 0{,}001$.

2,3. Результаты расчетов по формуле:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^3 - \left(x^{(k)}\right)^2 - 9x^{(k)} + 9}{3\left(x^{(k)}\right)^2 - 2x^{(k)} - 9}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

приведены в табл. 6–8.

Таблица 6

k	0	1	2	3	4
$x^{(k)}$	- 4,00000	-3,255319	-3,023383	-3,000225	-3,000000
$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$	-	0,744681	0,231936	0,023158	0,000225

Таблица 7

k	0	1	2	3
$x^{(k)}$	0,5000	0,972973	0,9998246	1,0000000
$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$	-	0,472973	0,0268516	0,0001754

Таблица 8

k	0	1	2	3	4	5
$x^{(k)}$	4,0000	3,322581	3,051484	3,001674	3,000002	3,0000
$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$	-	0,6774194	0,2710969	0,049809	0,001671	$2 \cdot 10^{-6}$

В результате получены приближенные значения корней: $x_{*1} \cong -3{,}0000$; $x_{*2} \cong 1{,}0000$; $x_{*3} \cong 3{,}0000$. ■

В. МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Методика решения задачи

Шаг 1. Найти начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$ одним из методов отделения корней, задать малое положительное число ε. Положить $k = 0$.

Шаг 2. Найти середину текущего интервала неопределенности:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2} .$$

Шаг 3. Если $f(a_k) \cdot f(c_k) < 0$, то положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$, а если $f(c_k) \cdot f(b_k) < 0$, то принять $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$. В результате находится текущий интервал неопределенности $L_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Шаг 4. Если $b_{k+1} - a_{k+1} \le \varepsilon$, то процесс завершить: $x_* \in L_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Приближенное значение корня можно найти по формуле $x_* \cong \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$.

Если $b_{k+1} - a_{k+1} > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к п.2.

Пример 5. Найти корень уравнения $x^3 - x + 1 = 0$ методом половинного деления с точностью $\varepsilon_1 = 0{,}01$ и $\varepsilon_2 = 0{,}0005$.

☐ I. Результат отделения корня уравнения $x_* \in [-2; -1]$, поэтому $a_0 = -2$, $b_0 = -1$.

II. Функция непрерывна на отрезке $[-2; -1]$, имеет единственный простой корень. На концах отрезка функция имеет значения $f(-2) = -5$, $f(-1) = 1$, противоположные по знаку. Результаты расчетов приведены в табл. 9.

Таблица 9

k	$f(a_k)$	a_k	b_k	$f(b_k)$	$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-5	-2	-1	1	-1,5	-0,875	1
1	-0,875	-1,5	-1	1	-1,25	0,2965	0,5
2	-0,875	-1,5	-1,25	0,2965	-1,375	-0,224	0,25
3	-0,224	-1,375	-1,25	0,2965	-1,3125	0,05	0,125
4	-0,224	-1,375	-1,3125	0,05	-1,34375	-0,08	0,0625
5	-0,08	-1,34375	-1,3125	0,05	-1,3282	-0,015	0,03125
6	-0,015	-1,3282	-1,3125	0,05	-1,3204	0,018	0,0156
7	-0,015	-1,3282	-1,3204	0,018	-1,3243	0,0018	0,00781
8	-0,015	-1,3282	-1,3243	0,0018	-1,3263	-0,007	0,0039
9	-0,007	-1,3263	-1,3243	0,0018	-1,3253	-0,0025	0,002
10	-0,0025	-1,3253	-1,3243	0,0018	-1,3248	-0,0003	0,001
11	-0,0003	-1,3248	-1,3243	0,0018	-	-	0,0005

Если $\varepsilon_1 = 0{,}01$, корень $x_* \in [-1{,}3282; -1{,}3204]$, а если $\varepsilon_2 = 0{,}0005$ – корень

$x_* \in [-1{,}3248;\ -1{,}3243]$ или $x_* \cong \dfrac{-1{,}3282 - 1{,}3204}{2} = -1{,}3243$ при $\varepsilon_1 = 0{,}01$;

$x_* \cong \dfrac{-1{,}3248 - 1{,}3243}{2} = -1{,}3245$ при $\varepsilon_2 = 0{,}0005$. ■

Пример 6. Найти корень уравнения $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

□ Уточним корень, лежащий на отрезке $[2{,}5;\ 4]$. Результаты расчетов поместим в табл. 10.

Таблица 10

k	$f(a_k)$	a_k	b_k	$f(b_k)$	$c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-4,125	2,5	4	21	3,25	3,5156	1,5
1	-4,125	2,5	3,25	3,5156	2,875	-1,3769	0,75
2	-1,3769	2,875	3,25	3,5156	3,0625	0,78149	0,375
3	-1,3769	2,875	3,0625	0,7815	2,96875	-0,3672	0,1875
4	-0,3672	2,9687	3,0625	0,7815	3,01562	0,18945	0,09375
5	-0,3672	2,9687	3,0156	0,1894	2,99218	-0,0933	0,04687
6	-0,0933	2,9921	3,0156	0,1894	3,0039	0,0469	0,02344
7	-0,0933	2,9921	3,0039	0,0469	2,99804	-0,02349	0,01172
8	-0,02349	2,99804	3,0039	0,0469	3,00097	0,011647	0,00586

В результате найден интервал $[2{,}99804;\ 3{,}0039]$ и приближенное значение корня $x_* \cong 3{,}00097$.

Аналогично могут быть найдены интервалы, содержащие остальные корни уравнения.■