## *Занятие* 4.

# ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

## А. СИМПЛЕКС-МЕТОД ДАНЦИГА

### А1. Решение канонической задачи

#### Постановка задачи

Найти максимум функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = 1, \ldots, m; \ \ m < n \, ,$$

$$x_j \ge 0 \, , \ j = 1, \ldots, n \, .$$

Задача называется *канонической*, а искомое решение $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^T$ – *оптимальным*. Будем считать, что в ограничениях все числа $b_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$. Этого можно добиться, умножая ограничения, где $b_i < 0$, на «$-1$».

#### Алгоритм решения канонической задачи

*Шаг* 1. Найти начальное базисное решение.

а) записать исходную каноническую задачу одним из двух способов:
- в форме, где для $m$ переменных коэффициенты в уравнениях образуют единичную матрицу, используя преобразования Гаусса–Жордана;
- в расширенной форме с помощью перехода к $M$-задаче;

б) выделить базисные переменные (их можно подчеркнуть), входящие только в одно из уравнений системы с коэффициентами 1, а во все остальные с коэффициентами, равными нулю;

в) выделить свободные переменные (все остальные, кроме базисных);

г) найти начальное базисное решение, полагая свободные переменные равными нулю.

*Шаг* 2. Заполнить табл.1:

а) столбец базисных переменных (*БП*);

б) столбец базисного решения (*БР*);

в) строку $c_j$ и столбец $c_{i_B}$ коэффициентов функции. В столбец $c_{i_B}$ записываются коэффициенты, соответствующие базисным переменным;

г) совокупность коэффициентов $\overline{a}_{ij}$ систем (над элементами поставлена черта для унификации обозначений, так как система преобразуется одним из двух способов).

*Шаг* 3. Вычислить относительные оценки

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{i_B} \overline{a}_{ij} = c_j - z_j, \qquad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{i_B} \overline{a}_{ij}, \qquad j = 1,\ldots,m+n,$$

и записать их в таблицу. Заметим, что для базисных переменных оценки равны нулю. Этот факт можно использовать как для проверки правильности заполнения таблицы, так и для сокращения вычислений.

*Шаг* 4. Проанализировать относительные оценки:

а) если все оценки $\Delta_j$ неположительны, т.е.

$$\Delta_j \le 0, \qquad j = 1,\ldots,m+n,$$

то расчет закончен и следует найти полученное базисное решение. Значения базисных переменных содержатся в столбце *БР*, а остальные переменные полагаются равными нулю, как свободные.

Проанализировать полученное базисное решение:

- если число нулевых оценок $\Delta_j = 0$ равно числу базисных переменных, задача имеет *единственное решение*. Если число нулевых оценок $\Delta_j = 0$ превышает число базисных переменных, то задача имеет *бесконечное множество решений*;
- если все $\Delta_j$ неположительны, но базисное решение содержит хотя бы одну искусственную переменную, не равную нулю, то *ограничения задачи несовместны*;

б) если среди оценок есть положительные, то следует найти среди них максимальную:

$$\Delta_r = \max_{j \in J_H} \Delta_j,$$

где $J_H$ – множество индексов небазисных переменных, и проанализировать коэффициенты столбца таблицы, которому соответствует максимальная положительная оценка (если таких оценок несколько, принято выбирать оценку с наименьшим номером). Если этот столбец содержит хотя бы один положительный коэффициент, то номер столбца обозначается через $r$ и переменная, соответствующая ему, должна быть введена в число базисных. Если среди коэффициентов этого столбца нет ни одного положительного коэффициента, то это означает, что множество допустимых решений задачи не ограничено, функция $f(x)$ не ограничена сверху и *задача решения не имеет*.

Столбец, соответствующий выбранной оценке, помечается $\otimes$. Он называется *разрешающим*.

*Шаг* 5. Поделить элементы столбца базисных решений (*БР*) на соответствующие элементы разрешающего столбца и среди полученных частных выбрать наименьшее. Строка, соответствующая выбранному отношению, помечается $\otimes$. Она называется *разрешающей*.

Таким образом, новая переменная $x_r$ вводится на место переменной $x_{s_B}$, удаляемой из числа базисных, номер которой $s_B$, а также номер $s$ соответствующей строки таблицы, определяются из условия

$$\min_{1 \le i \le m} \left[ \frac{\overline{x}_{i_B}}{\overline{a}_{ir}} \right] = \frac{\overline{x}_{s_B}}{\overline{a}_{sr}},$$

где $\overline{x}_{i_B}$ – значение координаты текущего базисного решения, соответствующей $i$-й строке; $\overline{a}_{ir}$ – коэффициент при координате $x_r$ в $i$-й строке. Если таких переменных окажется больше одной, то из базиса выводится та переменная, которая имеет больший номер. Заметим, что рассматриваются только неотрицательные отношения, т.е. если коэффициент $\overline{a}_{ir}$ отрицателен или равен нулю, то отношение не подсчитывается и на его месте в приведенных далее таблицах ставится знак «--». Элемент $\overline{a}_{sr}$, расположенный на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется *разрешающим* и выделяется в таблице прямоугольником.

Удобно использовать следующее правило: из числа базисных выводится переменная, соответствующая разрешающей строке, а на ее место вводится переменная, соответствующая разрешающему столбцу.

*Шаг* 6. Вычислить новое базисное решение, осуществив пересчет таблицы:

а) вместо координаты $x_{s_B}$ в состав базисных ввести координату $x_r$, значение которой находится по формуле

$$x_r = \frac{\overline{x}_{s_B}}{\overline{a}_{sr}},$$

и пересчитать $s$-ю строку, в которой произошли изменения по базису:

$$a_{sj} = \frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{sr}}, \quad j = 1, \dots, m + n.$$

Таким образом, каждый элемент строки, отмеченной ⊗, делится на разрешающий элемент $\overline{a}_{sr}$;

б) вычислить все остальные коэффициенты:

$$a_{ij} = \overline{a}_{ij} - a_{sj}\,\overline{a}_{ir} = \overline{a}_{ij} - \frac{\overline{a}_{sj}}{\overline{a}_{sr}}\,\overline{a}_{ir}, \quad i = 1, \dots, m;\ i \ne s;\ \ j = 1, \dots, m + n.$$

Новое базисное решение определить на основании текущего базисного решения по формулам

$$x_{i_B} = \overline{x}_{i_B} - \overline{a}_{ir}\, x_r, \quad \forall i_B\colon\ i_B \ne s_B.$$

Для упрощения вычислений по приведенным формулам используется «правило прямоугольника».

Пусть подсчитывается значение $a_{ij}$. Следует соединить элемент $\overline{a}_{ij}$ в предыдущей таблице с разрешающим элементом $\boxed{\overline{a}_{sr}}$. Получена одна из диагоналей прямоугольника. Вторую диагональ образует соединение элементов $\overline{a}_{ir}$ и $\overline{a}_{sj}$.

Далее из текущего значения $\overline{a}_{ij}$ вычитается произведение элементов $\overline{a}_{ir}$ и $\overline{a}_{sj}$, деленное на разрешающий элемент $\overline{a}_{sr}$ (рис.1).

$$a_{ij} = \overline{a}_{ij} - \frac{\overline{a}_{sj} \cdot \overline{a}_{ir}}{\overline{a}_{sr}}$$

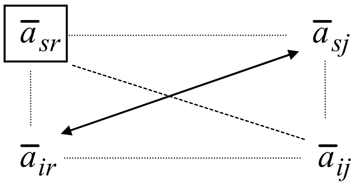


Рис. 1

Перейти к шагу 3.

**З а м е ч а н и я.**

**1.** Если в задаче в каждом уравнении имеется базисная переменная, то на шаге 1 нет необходимости делать линейные преобразования или вводить искусственные переменные.

**2.** Если решается задача поиска минимума, то стратегия симплекс-метода аналогична, только в базис вводится переменная, которой соответствует наименьшая отрицательная оценка $\Delta_r$. Процесс перехода заканчивается, когда найдено такое базисное решение, что все относительные оценки $\Delta_j$, $j = 1, \ldots, m+n$, становятся неотрицательными: $\Delta_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m+n$.

**Пример 1.** Найти максимум и минимум в задаче

$$f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \text{extr},$$
$$-x_1 + x_2 + \underline{x_3} = 2,$$
$$x_1 + x_2 + \underline{x_4} = 4,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4.$$

□ Решается каноническая задача. Переменные $x_3$ и $x_4$ являются базисными, так как они входят только в одно уравнение, причем с коэффициентом +1.

Сначала решим задачу графически:

а) выразим базисные переменные через небазисные (свободные) и используем условие $x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4$:

$$x_3 = 2 + x_1 - x_2 \geq 0, \quad x_4 = 4 - x_1 - x_2 \geq 0,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

б) выразим целевую функцию через небазисные (свободные) переменные:

$$f(x) = -x_1 + 2x_2 - 2 - x_1 + x_2 - 4 + x_1 + x_2 = -6 - x_1 + 4x_2;$$

в) решим полученную задачу линейного программирования

$$f(x) = -6 - x_1 + 4x_2 \to \text{extr},$$
$$2 + x_1 - x_2 \geq 0,$$
$$4 - x_1 - x_2 \geq 0,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Для этого построим соответствующее множество допустимых решений $X$. Затем найдем градиент: $\nabla f(x) = (-1; 4)^T$, проведем линию уровня функции перпендикулярно градиенту и будем передвигать ее параллельно самой себе до касания с множеством допустимых решений.

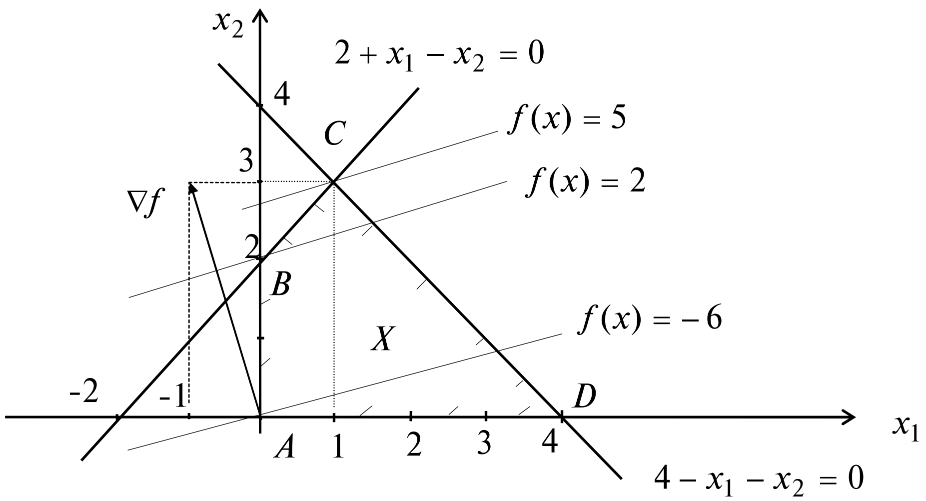


Рис. 1

Так как градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в данной точке, то в точке $C = (1, 3)^T$ достигается максимум (рис. 1). Значения остальных переменных находятся из условий связи: $x_3 = 2 + 1 - 3 = 0;$ $x_4 = 4 - 1 - 3 = 0.$ В результате получаем ответ в исходной задаче $x^*_{\max} = (1, 3, 0, 0)^T$.

Заметим, что минимум достигается в точке $D = (4, 0)^T$. При этом $x_3 = 2 + 4 - 0 = 6;$ $x_4 = 4 - 4 - 0 = 0.$ В результате получаем точку минимума в исходной задаче $x^*_{\min} = (4, 0, 6, 0)^T$.

Решим поставленную каноническую задачу симплекс-методом.

1. Найдем начальное базисное решение:

а) нет необходимости вводить искусственные переменные, так как в каждом уравнении уже есть базисная переменная;

б) подчеркнем базисные переменные $x_3$ и $x_4$ в уравнениях, описывающих ограничения;

в) свободными переменными являются $x_1$ и $x_2$;

г) начальное базисное решение находится при приравнивании нулю свободных переменных: $x_1 = x_2 = 0$. Тогда $x_3 = 2$, $x_4 = 4$. Начальное базисное решение $x = (0; 0; 2; 4)^T$. Ему соответствует точка $A$ на рис. 1.

2. Заполним табл. 1 согласно алгоритму с учетом результатов п.1.

Таблица 1

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\dfrac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_3$ | $2$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $0$ | |
| $-1$ | $x_4$ | $4$ | $1$ | $1$ | $0$ | $1$ | |
| | | | | | | | $z_j$ |
| | | | | | | | $\Delta_j$ |

$3^1$. Вычислим относительные оценки $\Delta_j$, $j = 1,\dots,4$ :

$$\Delta_1 = -1 - [(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1] = -1, \qquad z_1 = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = 0;$$

$$\Delta_2 = 2 - [(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1] = 4, \qquad z_2 = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = -2;$$

$$\Delta_3 = -1 - [(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 0] = 0, \qquad z_3 = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 0 = -1;$$

$$\Delta_4 = -1 - [(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 1] = 0, \qquad z_4 = (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -1$$

и занесем их в табл. 2.

Таблица 2

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\dfrac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_3$ | $2$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $0$ | |
| $-1$ | $x_4$ | $4$ | $1$ | $1$ | $0$ | $1$ | |
| | | | $0$ | $-2$ | $-1$ | $-1$ | $z_j$ |
| | | | $-1$ | $4$ | $0$ | $0$ | $\Delta_j$ |
| | | | | $\otimes$ | | | |

$4^1$. Проанализируем относительные оценки. Оценка $\Delta_2 = 4 > 0$ наибольшая положительная. Проведем анализ столбца $x_2$. Все коэффициенты положительны, $r = 2$. Введем в базис переменную $x_2$.

$5^1$. Определим переменную, выводимую из базиса. Для этого вычислим наименьшее из неотрицательных отношений $\dfrac{БР}{\overline{a}_{ir}}$, оно равно 2 (табл. 3). Поэтому $s = 1$ и выведем переменную $x_3$, расположенную в первой строке.

Таблица 3

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_3$ | 2 | $-1$ | $\boxed{1}$ | 1 | 0 | $\frac{2}{1}=2$ ⊗ |
| $-1$ | $x_4$ | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\frac{4}{1}=4$ |
| | | | 0 | $-2$ | $-1$ | $-1$ | $z_j$ |
| | | | $-1$ | 4 | 0 | 0 | $\Delta_j$ |
| | | | | ⊗ | | | |

6[1]. Вычислим новое базисное решение. Результаты пересчета табл. 3 приведены в табл. 4.

Таблица 4

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 2 | $x_2$ | 2 | $-1$ | 1 | 1 | 0 | |
| $-1$ | $x_4$ | 2 | 2 | 0 | $-1$ | 1 | |
| | | | | | | | $z_j$ |
| | | | | | | | $\Delta_j$ |

В табл. 4 в столбец *БП* введена переменная $x_2$ вместо $x_3$ (табл. 3). Первой пересчитывается строка, соответствующая введенной переменной $x_2$. Она получается в результате деления каждого элемента разрешающей строки табл. 3, помеченной ⊗, на разрешающий элемент, равный 1. Остальные элементы пересчитаем по «правилу прямоугольника». Для второй строки табл. 3 имеем:

$$4-\frac{1\cdot 2}{1}=2,\quad 1-\frac{1\cdot(-1)}{1}=2,\quad 1-\frac{1\cdot 1}{1}=0,\quad 0-\frac{1\cdot 1}{1}=-1,\quad 1-\frac{1\cdot 0}{1}=1.$$

Перейдем к шагу 3.

3[2]. Вычислим относительные оценки $\Delta_j$, $j=1,\ldots,4$. Строку $\Delta_j$ пересчитаем, воспользовавшись табл. 3, также по «правилу прямоугольника» (табл. 5):

$$\Delta_1=-1-\frac{4\cdot(-1)}{1}=3,\quad \Delta_2=4-\frac{4\cdot 1}{1}=0,\quad \Delta_3=0-\frac{4\cdot 1}{1}=-4,\quad \Delta_4=0-\frac{0\cdot 4}{1}=0.$$

4[2]. Проанализируем относительные оценки и, как следствие, текущее базисное решение $x_2=2, x_4=2$, $x_1=x_3=0$ . Ему соответствует точка *B* на рис. 1.

Оценка $\Delta_1=3>0$ – наибольшая положительная. Следовательно, исследуемое решение не является оптимальным. Проанализируем столбец $x_1$. Среди его коэффициентов есть положительный, $r=1$. Введем в базис переменную $x_1$.

Таблица 5

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 2 | $x_2$ | 2 | $-1$ | 1 | 1 | 0 | |
| $-1$ | $x_4$ | 2 | 2 | 0 | $-1$ | 1 | |
| | | | $-4$ | 2 | 3 | $-1$ | $z_j$ |
| | | | 3 | 0 | $-4$ | 0 | $\Delta_j$ |
| | | | $\otimes$ | | | | |

$5^2$. Определим переменную, которая должна быть выведена из базиса. Для этого вычислим наименьшее из неотрицательных отношений $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$. Оно единственно и равно единице (табл. 6). Следовательно, $s = 2$ и переменная $x_1$ заменяется переменной $x_4$, расположенной во второй строке.

Таблица 6

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 2 | $x_2$ | 2 | $-1$ | 1 | 1 | 0 | -- |
| $-1$ | $x_4$ | 2 | $\boxed{2}$ | 0 | $-1$ | 1 | $\frac{2}{2}=1$ $\otimes$ |
| | | | $-4$ | 2 | 3 | $-1$ | $z_j$ |
| | | | 3 | 0 | $-4$ | 0 | $\Delta_j$ |
| | | | $\otimes$ | | | | |

$6^2$. Вычислим новое базисное решение. Результаты пересчета табл. 6 приведены в табл. 7.

Таблица 7

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 2 | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| $-1$ | $x_1$ | 1 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| | | | | | | | $z_j$ |
| | | | | | | | $\Delta_j$ |

В табл. 7 в столбец *БП* на место $x_4$ введена переменная $x_1$. Первой пересчитывается строка, соответствующая введенной переменной $x_1$. Она получается в результате деления каждого элемента разрешающей строки табл. 6, помеченной $\otimes$, на разрешающий элемент, равный 2. Остальные элементы пересчитываются по «правилу прямоугольника». Для первой строки имеем:

$2-\frac{2\cdot(-1)}{2}=3$, $-1-\frac{(-1)\cdot 2}{2}=0$, $1-\frac{0\cdot(-1)}{2}=1$, $1-\frac{(-1)\cdot(-1)}{2}=\frac{1}{2}$, $0-\frac{(-1)\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$.

Перейдем к шагу 3.

$3^3$. Вычислим относительные оценки $\Delta_j$, $j=1,\ldots,4$. Строка $\Delta_j$ пересчитывается по табл. 6 с применением «правила прямоугольника» (табл. 8):

$\Delta_1=3-\frac{3\cdot 2}{2}=0$, $\Delta_2=0-\frac{3\cdot 0}{2}=0$, $\Delta_3=-4-\frac{3\cdot(-1)}{2}=-\frac{5}{2}$, $\Delta_4=0-\frac{3\cdot 1}{2}=-\frac{3}{2}$.

Таблица 8

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 2 | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| $-1$ | $x_1$ | 1 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| | | | $-1$ | 2 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $z_j$ |
| | | | 0 | 0 | $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\Delta_j$ |

$4^3$. Проанализируем относительные оценки и, как следствие, текущее базисное решение $x_2=3$, $x_1=1$, $x_3=x_4=0$ . Так как все $\Delta_j\le 0$, на текущем базисном решении достигается максимум. Так как число нулевых оценок равно числу базисных переменных, то решение единственное. Этому решению соответствует точка $C$ на рис. 1. Таким образом, в процессе применения процедуры симплекс-метода произошел направленный перебор вершин множества допустимых решений. Переход из вершины $A$ в вершину $B$ , а затем в $C$ связан с последовательным увеличением значения целевой функции.

Найдем минимум в поставленной задаче. Используем табл. 2, т.е. будем считать, что шаги 1−3 алгоритма реализованы (табл. 9).

Таблица 9

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_3$ | 2 | $-1$ | 1 | 1 | 0 | -- |
| $-1$ | $x_4$ | 4 | $\boxed{1}$ | 1 | 0 | 1 | $\frac{4}{1}=4$ ⊗ |
| | | | 0 | $-2$ | $-1$ | $-1$ | $z_j$ |
| | | | $-1$ | 4 | 0 | 0 | $\Delta_j$ |
| | | | ⊗ | | | | |

$4^1$. Проанализируем относительные оценки. Поскольку ищется минимум, условием окончания процесса является неотрицательность всех относительных оценок, а при выборе разрешающего столбца следует найти наименьшую отрицательную оценку. Оценка $\Delta_1=-1$ – наименьшая отрицательная. Проанализируем столбец $x_1$. Среди коэффициентов есть положительный, поэтому $r=1$. Введем в базис переменную $x_1$.

$5^1$. Определим переменную, которая должна быть выведена из базиса. Для этого вычислим наименьшее из неотрицательных отношений $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$. Оно единственно и равно 4 (табл. 9). Следовательно, $s=2$ и в базисе переменная $x_4$ заменяется переменной $x_1$, расположенной во второй строке.

$6^1$. Вычислим новое базисное решение. Результаты пересчета табл. 9 приведены в табл. 10.

Таблица 10

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_3$ | 6 | 0 | 2 | 1 | 1 | |
| $-1$ | $x_1$ | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | | | | | | | $z_j$ |
| | | | | | | | $\Delta_j$ |

В табл. 10 в столбец *БП* на место $x_4$ введена переменная $x_1$. Первой пересчитывается строка, соответствующая введенной переменной $x_1$. Она получается в результате деления каждого элемента разрешающей строки табл. 9, помеченной ⊗, на разрешающий элемент, равный 1. Элементы первой строки пересчитываются по «правилу прямоугольника»: $2-\frac{4\cdot(-1)}{1}=6, -1-\frac{1\cdot(-1)}{1}=0$, $1-\frac{1\cdot(-1)}{1}=2$, $1-\frac{0\cdot(-1)}{1}=1$, $0-\frac{(-1)\cdot 1}{1}=1$.

Перейдем к шагу 3.

$3^2$. Вычислим относительные оценки $\Delta_j$, $j=1,\ldots,4$. Строка $\Delta_j$ пересчитывается по табл. 10 согласно «правилу прямоугольника» (табл. 11):

$$\Delta_1=-1-\frac{(-1)\cdot 1}{1}=0,\ \Delta_2=4-\frac{(-1)\cdot 1}{1}=5,\quad \Delta_3=0-\frac{(-1)\cdot 0}{1}=0,\quad \Delta_4=0-\frac{(-1)\cdot 1}{1}=1.$$

Таблица 11

| | | | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_3$ | 6 | 0 | 2 | 1 | 1 | |
| $-1$ | $x_1$ | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | | | $-1$ | $-3$ | $-1$ | $-2$ | $z_j$ |
| | | | 0 | 5 | 0 | 1 | $\Delta_j$ |

$4^2$. Проанализируем относительные оценки и, как следствие, текущее базисное решение $x_3=6$, $x_1=4$, $x_2=x_4=0$. Так как все оценки $\Delta_j\geq 0$, на текущем базисном решении достигается минимум. Поскольку число нулевых оценок равно числу базисных переменных, то решение единственное. Этому решению соответствует точка *D* на рис.1. ■

## A.2. Решение основной задачи

### Постановка задачи

Найти максимум функции

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ge b_i\,, \qquad i=1,\ldots,m\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i\,, \quad i=m+1,\ldots,p\,;$$

$$x_j \ge 0\,, \quad j=1,\ldots,n\,.$$

Задача линейного программирования называется *основной*. Предполагается, что $b_i \ge 0$, $i=1,\ldots,p$.

### Стратегия поиска

Для решения основной задачи симплекс-методом она должна быть приведена к канонической задаче путем введения в каждое ограничение по одной дополнительной переменной: в каждое ограничение-неравенство со знаком «$\le$» вводится дополнительная переменная со знаком «$+$» (она становится базисной), а в каждое ограничение-неравенство со знаком «$\ge$» вводится дополнительная переменная со знаком «$-$».

Каноническая задача записывается следующим образом:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i\,, \qquad i=1,\ldots,m\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + \underline{x_{n+i}} = b_i\,, \qquad i=m+1,\ldots,p\,;$$

$$x_1 \ge 0,\ldots,x_{n+p} \ge 0\,.$$

Так как в общем случае в уравнениях нет базисных переменных, то для того, чтобы можно было применить симплекс-метод, делается переход к $M$-задаче. В каждое из $m$ первых уравнений вводится искусственная переменная со знаком «$+$» (она становится базисной), а к целевой функции добавляется сумма искусственных переменных, умноженная на «$-M$». В результате получаем задачу в *расширенной форме*:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M\sum_{i=1}^{m} x_{n+p+i} \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + \underline{x_{n+p+i}} = b_i, \quad i=1,\dots,m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \underline{x_{n+i}} = b_i, \qquad i=m+1,\dots,p;$$

$$x_1 \ge 0,\dots,x_{n+p+m} \ge 0.$$

**З а м е ч а н и я.** Если решается задача поиска минимума целевой функции, то при переходе к $M$ -задаче перед числом $M$ ставится знак «$+$».

**Пример 1.** Найти условный максимум в задаче

$$f(x)=x_1-x_2 \to \max,$$

$$-1x_1+2x_2 \ge 4,$$

$$3x_1+2x_2 \le 14,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

□ Приведем поставленную основную задачу к канонической. Так как первое неравенство имеет знак «$\ge$» , введем дополнительную переменную $x_3$ со знаком «$-$». Поскольку во втором неравенстве знак «$\le$», то введем дополнительную переменную $x_4$ со знаком «$+$» (она становится базисной). В итоге получим каноническую задачу:

$$f(x)=x_1-x_2 \to \max,$$

$$-x_1+2x_2-x_3=4,$$

$$3x_1+2x_2+\underline{x_4}=14,$$

$$x_1,\dots,x_4 \ge 0.$$

Поскольку в первом уравнении нет базисных переменных, то перейдем к $M$ -задаче. Для этого введем искусственную переменную $x_5$ и добавим ее к целевой функции с коэффициентом «$-M$». В результате получим задачу в расширенной форме:

$$f(x)=x_1-x_2-Mx_5 \to \max,$$

$$-1x_1+2x_2-1x_3+0x_4+1\underline{x_5}=4,$$

$$3x_1+2x_2+0x_3+1\underline{x_4}+0x_5=14,$$

$$x_1,\dots,x_5 \ge 0.$$

Применим алгоритм симплекс-метода.

1. Найдем начальное базисное решение. Базисными переменными являются $x_5, x_4$, а свободными $x_1, x_2, x_3$. Приравняем свободные переменные к нулю. Тогда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $x_4 = 14$, $x_5 = 4$. Начальное базисное решение $(0; 0; 0; 14; 4)^T$. Начальному базисному решению соответствует начало координат на рис. 1.

2. Заполним табл. 1 согласно алгоритму.

Таблица 1

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $c_j$ |
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\dfrac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-M$ | $x_5$ | 4 | $-1$ | 2 | $-1$ | 0 | 1 | |
| 0 | $x_4$ | 14 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | |
| | | | | | | | | $z_j$ |
| | | | | | | | | $\Delta_j$ |

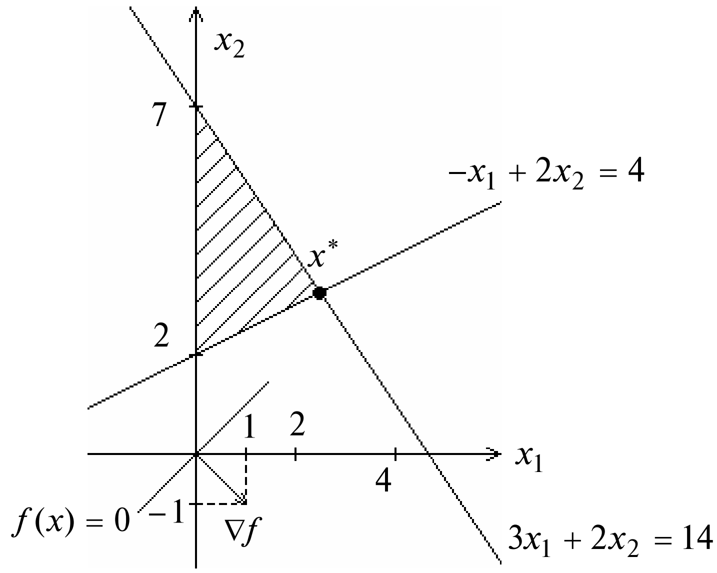


Рис. 1

$3^1$. Вычислим относительные оценки $\Delta_j$, $j = 1, \ldots, 5$ :

$\Delta_1 = 1 - [(-M)\cdot(-1) + 0\cdot 3] = 1 - M$; $\Delta_2 = -1 - [(-M)\cdot 2 + 0\cdot 2] = -1 + 2M$;

$\Delta_3 = 0 - [(-M)\cdot(-1) + 0\cdot 0] = -M$; $\Delta_4 = 0 - [(-M)\cdot 0 + 0\cdot 1] = 0$;

$\Delta_5 = -M - [(-M)\cdot 1 + 0\cdot 0] = 0$.

Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

| | | | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\frac{БР}{\bar{a}_{ir}}$ |
| $-M$ | $x_5$ | $4$ | $-1$ | $2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | |
| $0$ | $x_4$ | $14$ | $3$ | $2$ | $0$ | $1$ | $0$ | |
| | | | $M$ | $-2M$ | $M$ | $0$ | $-M$ | $z_j$ |
| | | | $1-M$ | $-1+2M$ | $-M$ | $0$ | $0$ | $\Delta_j$ |
| | | | | | | ⊗ | | |

4[1]. Проанализируем относительные оценки. Оценка $\Delta_2 = -1 + 2M > 0$, так как $M > 0$ и, следовательно, текущее базисное решение $x_4 = 14$, $x_5 = 4$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ не оптимально. Рассмотрим коэффициенты столбца при переменной $x_2$. Поскольку оба коэффициента положительны, то $r = 2$ и переменная $x_2$ должна быть введена в число базисных.

5[1]. Определим переменную, выводимую из базиса. Для этого вычислим отношения $\frac{БР}{\bar{a}_{ir}}$. Имеем $\frac{4}{2}, \frac{14}{2}$ (табл. 3). Выберем из них наименьшее значение. Следовательно, $s = 1$ и из числа базисных должна быть удалена переменная $x_5$ и заменена переменной $x_2$.

Таблица 3

| | | | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\frac{БР}{\bar{a}_{ir}}$ |
| $-M$ | $x_5$ | $4$ | $-1$ | $\boxed{2}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ ⊗ |
| $0$ | $x_4$ | $14$ | $3$ | $2$ | $0$ | $1$ | $0$ | $7$ |
| | | | $M$ | $-2M$ | $M$ | $0$ | $-M$ | $z_j$ |
| | | | $1-M$ | $-1+2M$ | $-M$ | $0$ | $0$ | $\Delta_j$ |
| | | | | | | ⊗ | | |

6[1]. Вычислим новое базисное решение, занося результаты пересчета табл. 3 в табл. 4.

Таблица 4

|  |  |  | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_2$ | $2$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ |  |
| $0$ | $x_4$ | $10$ | $4$ | $0$ | $1$ | $1$ | $-1$ |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | $z_j$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  | $\Delta_j$ |

В табл. 4 в столбец *БП* введена переменная $x_2$ вместо $x_5$. Первой пересчитывается строка, соответствующая введенной переменной $x_2$. Она получается в результате деления каждого элемента разрешающей строки табл. 3, помеченной ⊗, на разрешающий элемент, равный 2. Остальные элементы пересчитываются по «правилу прямоугольника». Для второй строки имеем:

$$14-\frac{4\cdot 2}{2}=10, \qquad 3-\frac{2\cdot(-1)}{2}=4, \qquad 2-\frac{2\cdot 2}{2}=0,$$

$$0-\frac{2\cdot(-1)}{2}=1, \qquad 1-\frac{2\cdot 0}{2}=1, \qquad 0-\frac{1\cdot 2}{2}=-1.$$

Перейдем к шагу 3.

3[2]. Вычислим оценки $\Delta_j$, $j=1,\dots,5$. Строка $\Delta_j$ пересчитывается по табл. 3 также согласно «правилу прямоугольника»:

$$\Delta_1=1-M-\frac{(-1+2M)\cdot(-1)}{2}=\frac{1}{2}, \qquad \Delta_2=0, \qquad \Delta_3=-M-\frac{(-1+2M)\cdot(-1)}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$\Delta_4=0-\frac{(-1+2M)\cdot 0}{2}=0; \qquad \Delta_5=0-\frac{(-1+2M)\cdot 1}{2}=-M+\frac{1}{2}.$$

Таблица 5

|  |  |  | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_2$ | $2$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ |  |
| $0$ | $x_4$ | $10$ | $4$ | $0$ | $1$ | $1$ | $-1$ |  |
|  |  |  | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $z_j$ |
|  |  |  | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $-M+\frac{1}{2}$ | $\Delta_j$ |
|  |  |  |  |  | ⊗ |  |  |  |

$4^2$. Проанализируем относительные оценки и, как следствие, текущее базисное решение $x_2 = 2$, $x_4 = 10$, $x_1 = x_3 = x_5 = 0$. Оценка $\Delta_1 = \frac{1}{2} > 0$, поэтому рассмотрим коэффициенты столбца при переменной $x_1$. Так как этот столбец содержит один положительный коэффициент, то $r = 1$ и переменная $x_1$ должна быть введена в число базисных переменных.

$5^2$. Определим переменную, выводимую из базиса. Для этого вычислим наименьшее из неотрицательных отношений $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$. Оно равно $\frac{10}{4}$ (табл. 6). Следовательно, $s = 2$ и поэтому из базиса должна быть удалена переменная $x_4$ и заменена переменной $x_1$.

Таблица 6

| | | | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_2$ | $2$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | -- |
| $0$ | $x_4$ | $10$ | $\boxed{4}$ | $0$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $\frac{10}{4}$ ⊗ |
| | | | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $z_j$ |
| | | | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $-M+\frac{1}{2}$ | $\Delta_j$ |
| | | | ⊗ | | | | | |

$6^2$. Вычислим новое базисное решение. Результат пересчета табл. 6 приведен в табл. 7.

Таблица 7

| | | | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_2$ | $\frac{26}{8}$ | $0$ | $1$ | $-\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | |
| $1$ | $x_1$ | $\frac{10}{4}$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | |
| | | | | | | | | $z_j$ |
| | | | | | | | | $\Delta_j$ |

Перейдем к шагу 3.

$3^3$. Вычислим оценки $\Delta_j$, $j = 1,\dots,5$, и определим, является ли решение $x_1 = \dfrac{10}{4}$, $x_2 = \dfrac{26}{8}$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ оптимальным (табл. 8).

Таблица 8

| | | | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\dfrac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| $-1$ | $x_2$ | $\dfrac{26}{8}$ | $0$ | $1$ | $-\dfrac{3}{8}$ | $\dfrac{1}{8}$ | $\dfrac{3}{8}$ | |
| $1$ | $x_1$ | $\dfrac{10}{4}$ | $1$ | $0$ | $\dfrac{1}{4}$ | $\dfrac{1}{4}$ | $-\dfrac{1}{4}$ | |
| | | | $1$ | $-1$ | $\dfrac{5}{8}$ | $\dfrac{1}{8}$ | $-\dfrac{5}{8}$ | $z_j$ |
| | | | $0$ | $0$ | $-\dfrac{5}{8}$ | $-\dfrac{1}{8}$ | $-M+\dfrac{5}{8}$ | $\Delta_j$ |

Все оценки $\Delta_j$ неположительны, следовательно, решение $x_1 = \dfrac{10}{4}$, $x_2 = \dfrac{26}{8}$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ является оптимальным. Решение исходной задачи $x_1^* = \dfrac{10}{4}$, $x_2^* = \dfrac{26}{8}$ получается путем отбрасывания дополнительных переменных $x_3, x_4$ и искусственной переменной $x_5$. Графически оно соответствует точке $x^*$ (рис. 1). ■

**Пример 2.** Найти условный максимум в задаче

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -2x_1 + 4x_2 \to \max,\\
&-x_1 + 2x_2 \le 4,\\
&3x_1 + 2x_2 \le 14,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

□ Приведем поставленную основную задачу к канонической. Так как оба неравенства имеют знак «≤», то введем дополнительные переменные $x_3$ и $x_4$ со знаком «+» (они становятся базисными). В итоге получим каноническую задачу:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -2x_1 + 4x_2 \to \max,\\
&-1x_1 + 2x_2 + 1\underline{x_3} + 0x_4 = 4,\\
&3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1\underline{x_4} = 14,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Решим ее симплекс-методом.

1. Найдем начальное базисное решение: $x_1 = x_2 = 0$ (так как $x_1, x_2$ − свободные переменные), $x_3 = 4$, $x_4 = 14$.

2. Заполним табл. 1 согласно алгоритму.

Таблица 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | −2 | 4 | 0 | 0 | $c_j$ |
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 0 | $x_3$ | 4 | −1 | 2 | 1 | 0 | |
| 0 | $x_4$ | 14 | 3 | 2 | 0 | 1 | |
| | | | | | | | $z_j$ |
| | | | | | | | $\Delta_j$ |

$3^1$. Вычислим оценки $\Delta_j$, $j = 1,\dots,4$, и определим, является ли базисное решение $x_3 = 4, x_4 = 14$, $x_1 = x_2 = 0$ оптимальным (табл. 2).

Таблица 2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | −2 | 4 | 0 | 0 | $c_j$ |
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 0 | $x_3$ | 4 | −1 | 2 | 1 | 0 | |
| 0 | $x_4$ | 14 | 3 | 2 | 0 | 1 | |
| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | $z_j$ |
| | | | −2 | 4 | 0 | 0 | $\Delta_j$ |
| | | | | | | ⊗ | |

$4^1$. Проанализируем относительные оценки. Оценка $\Delta_2 > 0$, поэтому исследуемое решение не является оптимальным. Рассмотрим столбец $x_2$. Его коэффициенты положительны. Значит, $r = 2$ и в базис должна быть введена переменная $x_2$.

$5^1$. Определим переменную, которая должна быть выведена из базиса, вычислив наименьшее из неотрицательных отношений $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$. Оно равно 2 (табл. 3). Следовательно, из базиса должна быть выведена переменная $x_3$ и заменена переменной $x_2$.

Таблица 3

| | | | $-2$ | $4$ | $0$ | $0$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 0 | $x_3$ | 4 | $-1$ | $\boxed{2}$ | 1 | 0 | 2 ⊗ |
| 0 | $x_4$ | 14 | 3 | 2 | 0 | 1 | 7 |
| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | $z_j$ |
| | | | $-2$ | 4 | 0 | 0 | $\Delta_j$ |
| | | | | ⊗ | | | |

6[1]. Вычислим новое базисное решение. Результаты пересчета табл. 3 приведены в табл. 4.

Таблица 4

| | | | $-2$ | $4$ | $0$ | $0$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 4 | $x_2$ | 2 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | |
| 0 | $x_4$ | 10 | 4 | 0 | $-1$ | 1 | |
| | | | | | | | $z_j$ |
| | | | | | | | $\Delta_j$ |

Перейдем к шагу 3.

3[2]. Вычислим оценки $\Delta_j$, $j = 1,\ldots,4$, и определим, является ли решение $x_2 = 2, x_4 = 10, x_1 = x_3 = 0$ оптимальным (табл. 5).

Таблица 5

| | | | $-2$ | $4$ | $0$ | $0$ | $c_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\frac{БР}{\overline{a}_{ir}}$ |
| 4 | $x_2$ | 2 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | |
| 0 | $x_4$ | 10 | 4 | 0 | $-1$ | 1 | |
| | | | $-2$ | 4 | 2 | 0 | $z_j$ |
| | | | 0 | 0 | $-2$ | 0 | $\Delta_j$ |

$4^2$. Все оценки $\Delta_j$, $j = 1,\ldots,4$, не положительны, значит, исследуемое решение $x_2^* = 2, x_4^* = 10, x_1^* = x_3^* = 0$ оптимально. Значение целевой функции в точке максимума $f_{\max} = 8$. Найденному решению соответствует вершина $A$ на рис. 2. Однако, как следует из геометрической интерпретации исходной задачи, она имеет бесконечное множество решений, лежащих на ребре $AB$. В этом легко убедиться с помощью симплекс-метода, если ввести в базис переменную $x_1$ вместо переменной $x_4$, которой соответствует оценка $\Delta_4 = 0$. Соответствующие расчеты приведены в табл. 6. Заметим, что равенство нулю оценки $\Delta_1$ для небазисной переменной $x_1$ также свидетельствует о наличии бесконечного множества решений.

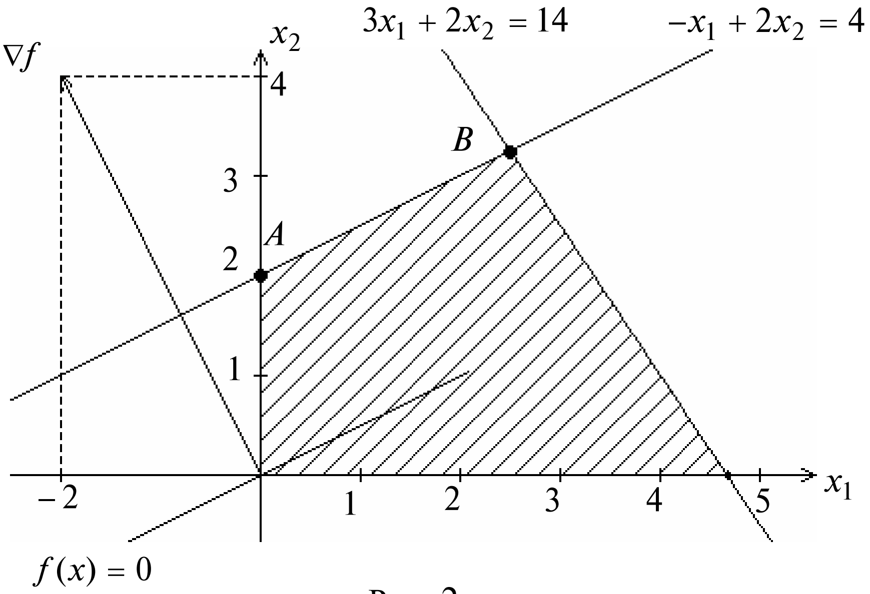


Рис. 2

Таблица 6

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $-2$ | $4$ | $0$ | $0$ | $c_j$ |
| $c_{i_B}$ | *БП* | *БР* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\dfrac{БР}{\bar{a}_{ir}}$ |
| 4 | $x_2$ | $\frac{26}{8}$ | 0 | 1 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | |
| $-2$ | $x_1$ | $\frac{10}{4}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | |
| | | | $-2$ | 4 | 2 | 0 | $z_j$ |
| | | | 0 | 0 | $-2$ | 0 | $\Delta_j$ |

Все оценки $\Delta_j$, $j = 1,\ldots,4$ не положительны, значит, исследуемое базисное решение $x_2^* = \frac{26}{8}; x_1^* = \frac{10}{4}; x_3^* = x_4^* = 0$ оптимально. Значение целевой функции в точке максимума $f_{\max} = 8$. Полученному решению соответствует вершина $B$ на рис. 2. Равенство нулю оценки $\Delta_4$ для небазисной переменной $x_4$ в табл. 6 свидетельствует о наличии бесконечного множества решений. ■