Занятие **3.**

МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА
НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

А. ОГРАНИЧЕНИЯ ТИПА РАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j\left(x_1,\ldots,x_n\right) = 0, j = 1,\ldots,m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{x \,\middle|\, g_j(x) = 0, j = 1,\ldots,m;\ m < n\right\}$.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,n;$

б) $g_j(x^*) = 0, \quad j = 1,\ldots,m.$

Шаг 3. Решить систему для двух случаев.

Первый случай: $\lambda_0^* = 0$.

Второй случай: $\lambda_0^* \neq 0$ (при этом поделить условие «а» на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате решения найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \neq 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума).

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить выполнение достаточных условий экстремума:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^*,λ^*):

$$d^2 L(x^*,\lambda^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j\ ;$$

б) записать систему в точке x^*:

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\ dx_i = 0, \quad j = 1,\dots,m;$$

в) из предыдущей системы выразить любые m дифференциалов dx_i через остальные $(n-m)$ и подставить в $d^2 L(x^*,\lambda^*)$;

г) если $d^2 L(x^*,\lambda^*) > 0$ при ненулевых dx, то в точке x^* – условный локальный минимум. Если $d^2 L(x^*,\lambda^*) < 0$ при ненулевых dx, то в точке x^* – условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка, следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если не выполняются, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

З а м е ч а н и я.

1. Иногда удается проверить условие линейной независимости градиентов ограничений на множестве X. Если оно выполняется, то на шаге 1 следует записать классическую функцию Лагранжа, на шаге 2 можно записывать сразу систему при $\lambda_0 = 1$, а на шаге 3 отсутствует случай $\lambda_0^* = 0$.

2. Для графического решения задачи (при $n = 2, m = 1$) следует:

а) построить множество допустимых решений X;

б) построить семейство линий уровня целевой функции и найти точки их касания с кривыми, описывающими ограничения. Эти точки являются «подозрительными» на условный экстремум;

в) исследовать поведение целевой функции при движении вдоль ограничения к исследуемой точке и от нее. Классифицировать точки, используя определение экстремума (см. определения 1.1 и 1.2 – лекция 1).

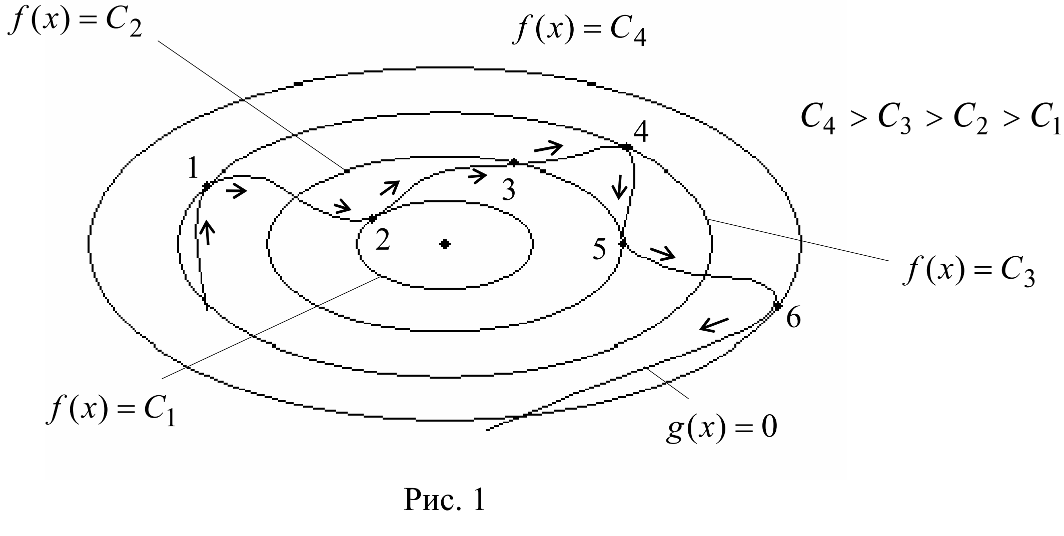

Рис. 1

На рис. 1 в точках 1 – 2, 4 – 6 линии уровня касаются ограничения. Исследование поведения функции в этих точках при движении по стрелкам показывает, что в точках 1, 4, 6 – локальный максимум, так как при приближении к ним функция возрастает, а затем убывает; в точках 2, 5 – локальный минимум, так как при приближении к ним функция убывает, а затем возрастает; в точке 3 нет условного экстремума, поскольку при приближении к ней и удалении дальше от нее функция возрастает.

3. При решении примеров для упрощения записи на шагах 2 и 3 алгоритма будем опускать знак «$*$», оставляя его только для значений x и λ, соответствующих условно-стационарным точкам.

Пример 1. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0.$$

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x) = \left(2x_1,\, 2x_2\right)^T \neq 0$ для всех $x \in X$, то условие выполняется (см. определение 3.6 – лекция 2). Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_1) = x_1 + x_2 + \lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$,

$\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$;

б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$.

3. Решением системы являются две условно-стационарные точки:

$$A\colon\ x_1^* = 1,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = -\frac{1}{2}; \qquad B\colon\ x_1^* = -1,\ x_2^* = -1,\ \lambda_1^* = \frac{1}{2}.$$

4. Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

а) $d^2L(x^*, \lambda_1^*) = 2\lambda_1^* dx_1^2 + 2\lambda_1^* dx_2^2$, так как $\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2\lambda_1^*$,

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

б) $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$, так как $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 2x_1$, $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 2x_2$;

в) исследуем точку *A*. Получаем $dg_1(A) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. С учетом полученного соотношения $d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -2dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x^* = (1,1)^T$ – регулярный условный локальный максимум.

Исследуем точку B. Получаем $dg_1(B) = -2dx_1 - 2dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. С учетом полученного соотношения $d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x^* = (-1,-1)^T$ – регулярный условный локальный минимум.

5. Подсчитаем значения функции в точках экстремума: $f(A) = 2, f(B) = -2$. Графическое решение задачи изображено на рис. 2. ■

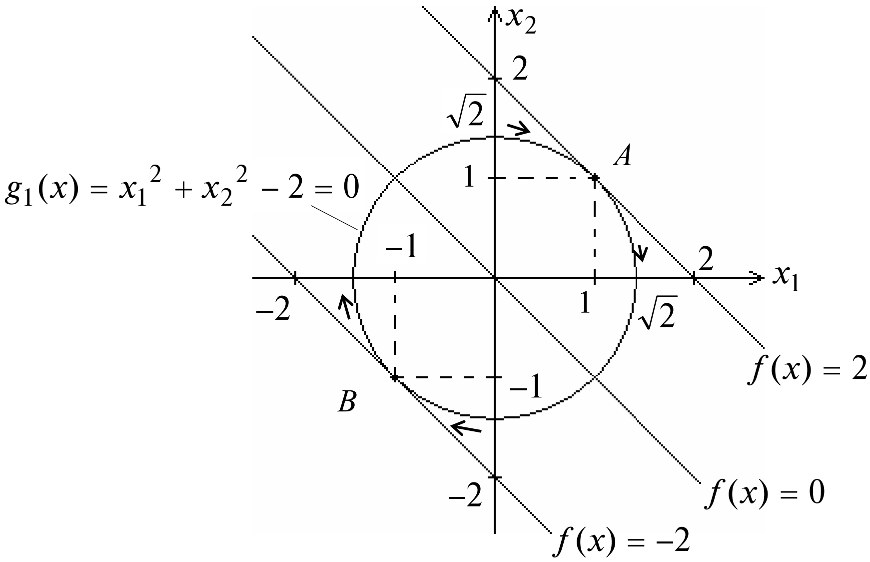

Рис. 2

Б. ОГРАНИЧЕНИЯ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j(x_1,\ldots,x_n) \le 0$, $j = 1,\ldots,m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \qquad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; g_j(x) \le 0,\ j = 1,\ldots,m \right\}$.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия минимума (максимума) первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n$;

б) $g_j(x^*) \le 0$, $j = 1,\ldots,m$;

в) $\lambda_j^* \ge 0$, $j = 1,\ldots,m$ (для минимума), $\lambda_j^* \le 0$, $j = 1,\ldots,m$ (для максимума);

г) $\lambda_j^* \ g_j(x^*) = 0$, $j = 1,\ldots,m$.

Шаг 3. Решить систему для двух случаев.

Первый случай: $\lambda_0^* = 0$.

Второй случай: $\lambda_0^* \ne 0$ $\big($при этом поделить условия, записанные на шаге 2, на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на $\lambda_j^*\big)$.

В результате решения найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \ne 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума). В каждом из двух случаев следует начинать с рассмотрения 2^m вариантов удовлетворения условия «г» дополняющей нежесткости.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить выполнение достаточных условий экстремума первого или второго порядка.

Для проверки выполнения достаточных условий первого порядка следует:

а) определить число l активных в точке x^* ограничений;

б) если $l = n$ и $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^*– условный локальный минимум. Если $l = n$ и $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^* – условный локальный максимум. Если $l < n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки выполнения достаточных условий второго порядка следует:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^*,λ^*):

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j}\ dx_i\, dx_j\ ;$$

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы активных ограничений:

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\ dx_i = 0,\ \ j \in J_a;\ \ \ \lambda_j^* > 0\ \ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\ dx_i \le 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0;$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа при ненулевых dx, удовлетворяющих системе, составленной в п.б. Если $d^2L(x^*,\lambda^*) > 0$, то в точке x^* – условный локальный минимум. Если $d^2 L(x^*,\lambda^*) < 0$, то в точке x^* – условный локальный максимум.

Если достаточные условия первого и второго порядка не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (см. утверждение 3.6 – лекция 2), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Пример 2. Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 \le 0,$$
$$g_3(x) = -x_2 \le 0.$$

☐ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 \left[x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \right] + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2 (-x_1) + \lambda_3 (-x_2).$$

2. Выпишем необходимые условия минимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$,

$\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 (x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$, $-x_1 \le 0$, $-x_2 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \ge 0$;

г) $\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$, $\lambda_2 (-x_1) = 0$, $\lambda_3 (-x_2) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

Первый случай: $\lambda_0 = 0$, тогда условия “а” запишутся в виде

$$2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0,$$
$$2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0.$$

Рассмотрим восемь вариантов выполнения условий «г» дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, при этом не удовлетворяется требование утверждения 3.4;

2) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, тогда $x_1 = x_2 = 0$ из условия «а», но первое условие дополняющей нежесткости не удовлетворяется;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 = 0$, тогда из первого уравнения в условии «а» имеем $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

4) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \ne 0$, тогда из второго уравнения в условии «а» имеем $\lambda_3 = 0$, т.е. также имеется противоречие;

5) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, тогда $x_1 = 0$ и из первого уравнения в условии «а» имеем $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

6) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, тогда $x_2 = 0$ и из второго уравнения в условии «а» имеем $\lambda_3 = 0$, т.е. также имеется противоречие;

7) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$, тогда не выполняются оба уравнения в условии "а";

8) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, тогда уравнения $x_1 = x_2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, следующие из условия "г", вместе не выполняются.

Условно-стационарных точек пока не найдено.

Второй случай: $\lambda_0 \neq 0$. Поделив уравнения приведенной в п.2 системы на λ_0 и заменив $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3, получим:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$, $\quad -x_1 \leq 0$, $\quad -x_2 \leq 0$;

в) $\lambda_1 \geq 0$, $\quad \lambda_2 \geq 0$, $\quad \lambda_3 \geq 0$;

г) $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$, $\quad \lambda_2(-x_1) = 0$, $\quad \lambda_3(-x_2) = 0$.

Рассмотрим восемь вариантов выполнения условий дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, тогда $x_1 = 0, x_2 = 2$ и не выполняется первое ограничение в условии «б»;

2) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$2x_1(1 + \lambda_1) = 0,$$
$$2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 = 0.$$

Если $\lambda_1 = -1$, то третье уравнение не удовлетворяется. Если $x_1 = 0$, то $x_2 = \pm 1$. Ограничениям в условии «б» удовлетворяет $x_2 = 1$, при этом $\lambda_1 = 1$. Получили условно-стационарную точку A: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = 1,\ \lambda_2^* = 0,\ \lambda_3^* = 0$;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, тогда

$$x_1 = 0,$$
$$2x_1 - \lambda_2 = 0,$$
$$2(x_2 - 2) = 0.$$

Получаем $\lambda_2 = 2x_1 = 0$, что противоречит условию $\lambda_2 \neq 0$;

4) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, тогда

$$x_2 = 0,$$
$$2x_1 = 0,$$
$$2(x_2 - 2) - \lambda_3 = 0.$$

Получаем $\lambda_3 = -4 < 0$, что противоречит условию «в»;

5) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$x_1 = 0,$$
$$2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$2\left(x_2 - 2\right) + 2\lambda_1 x_2 = 0 .$$

Из третьего соотношения следует, что $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

6) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

$$2x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0,$$

$$2\left(x_2 - 2\right) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0 .$$

Из последнего соотношения следует, что $\lambda_3 = -4 < 0$. Это противоречит условию «в»;

7) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, тогда

$$x_1 = x_2 = 0,$$

$$2x_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$2\left(x_2 - 2\right) - \lambda_3 = 0 .$$

Из второго соотношения следует, что $\lambda_2 = 0$. Это противоречит условию $\lambda_2 \neq 0$;

8) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, тогда $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Из условия «г» следует, что $x_1 = 0, x_2 = 0$. Эта система несовместна.

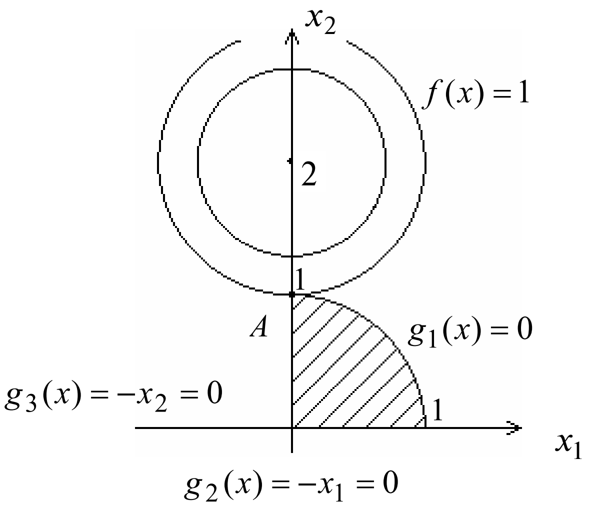

Рис. 3

4. Проверим выполнение достаточных условий минимума. В точке A имеются два активных ограничения, т.е. $l = 2 = n = 2$ (рис. 3). Так как $\lambda_1^* = 1 > 0$, $\lambda_2^* = 0$, то достаточные условия минимума первого порядка не выполняются ввиду того, что требуется строгая положительность соответствующих множителей Лагранжа. Проверим условия второго порядка: $d^2 L\left(A\right) = (2 + 2\lambda_1^*) dx_1^2 + (2 + 2\lambda_1^*) dx_2^2$. Поскольку в точке два активных ограничения и для одного из них $\lambda_1^* > 0$, а для другого $\lambda_2^* = 0$, то применим условия:

$$dg_1\left(A\right) = 2x_1^*\, dx_1 + 2x_2^*\, dx_2 = 2dx_2 = 0, \quad \lambda_1^* > 0;$$

$$dg_2\left(A\right) = -\,dx_1 \leq 0, \quad \lambda_2^* = 0 .$$

В результате $d^2L(A) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \ge 0$ и $dx_1 \ne 0$. Поэтому в точке A – локальный условный минимум. С другой стороны, целевая функция и множество допустимых решений выпуклые. Поэтому в точке A достигается глобальный минимум.

5. Вычислим значение функции в точке глобального минимума: $f(A) = 1$. ■

В. СМЕШАННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ и функции ограничений типа равенств и неравенств: $g_j(x) = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,\ldots,p$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \left| \begin{array}{l} g_j(x) = 0,\ j = 1,\ldots,m;\ m < n \\ g_j(x) \le 0,\ j = m+1,\ldots,p \end{array} \right. \right\}$.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия минимума (максимума) первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n$;

б) $g_j(x^*) = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $g_j(x^*) \le 0$, $j = m+1,\ldots,p$;

в) $\lambda_j^* \ge 0$, $j = m+1,\ldots,p$ (для минимума),

$\lambda_j^* \le 0$, $j = m+1,\ldots,p$ (для максимума);

г) $\lambda_j^* \, g_j(x^*) = 0$, $j = m+1,\ldots,p$.

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

Первый случай: $\lambda_0^* = 0$.

Второй случай: $\lambda_0^* \ne 0$ (при этом поделить условия «а», «в», «г» на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \ne 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума). В каждом из двух случаев следует начинать с рассмотрения 2^{p-m} вариантов удовлетворения условия «г» дополняющей нежесткости.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить выполнение достаточных условий экстремума первого или второго порядка.

Для проверки достаточных условий первого порядка следует:

а) определить число l ограничений-равенств и активных ограничений-неравенств;

б) если $l = n$ и $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, т.е. для всех активных ограничений-неравенств, то в точке x^* – локальный минимум. Если $l = n$ и $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^*– локальный максимум. Если $l < n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки достаточных условий второго порядка следует:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^*,λ^*): $d^2L(x^*,\lambda^*) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j$;

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы ограничений-равенств и активных в точке x^* ограничений-неравенств:

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\, dx_i = 0,\ j = 1,\ldots,m \quad \text{и} \quad j \in J_a;\ \lambda_j^* > 0\ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\, dx_i \le 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^* = 0;$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих системе из п.б. Если $d^2L(x^*,\lambda^*) > 0$, то в точке x^* – условный локальный минимум. Если $d^2L(x^*,\lambda^*) < 0$, то в точке x^* – условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (см. утверждение 3.10 – лекция 2), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Пример 3. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 - x_2^2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1 - x_2 - 1 = 0,$$

$$g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0.$$

☐ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L\left(x,\lambda_0,\lambda\right) = \lambda_0\,(x_1 - x_2^2) + \lambda_1\,(x_1 - x_2 - 1) + \lambda_2\,(x_1^2 + x_2^2 - 5).$$

2. Выпишем необходимые условия минимума и максимума первого порядка:

а) $\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0$, $\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = -2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0$;

б) $x_1 - x_2 - 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_2 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2\ (x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

Первый случай: $\lambda_0 = 0$, тогда условие «а» имеет вид

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0,$$
$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Рассмотрим два варианта удовлетворения условия «г»:

1) $\lambda_2 = 0$, тогда $\lambda_1 = 0$ и не удовлетворяется условие утверждения 3.8;

2) $\lambda_2 \ne 0$, тогда система уравнений

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0,$$
$$x_1 - x_2 - 1 = 0$$

удовлетворяется в двух точках: $x_1 = 2, x_2 = 1$; $x_1 = -1, x_2 = -2$. Складывая два уравнения в условии «а», получаем $2\lambda_2 (x_1 + x_2) = 0$. Так как $\lambda_2 \ne 0$, то $x_1 = -x_2$, что не удовлетворяется в обеих найденных точках.

Второй случай: $\lambda_0 \ne 0$. Поделив уравнения приведенной в п.2 системы на λ_0 и заменив $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, запишем условие «а» в виде

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \quad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Остальные условия сохраняют вид.

Рассмотрим два варианта удовлетворения условия «г»:

1) $\lambda_2 = 0$, тогда

$$1 + \lambda_1 = 0,$$
$$-2x_2 - \lambda_1 = 0,$$
$$x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

Отсюда имеем $\lambda_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_1 = \dfrac{3}{2}$. В результате получили условно-стационарную точку A: $x_1^* = \dfrac{3}{2},\ x_2^* = \dfrac{1}{2},\ \lambda_1^* = -1,\ \lambda_2^* = 0$, в которой удовлетворяется необходимое условие и минимума, и максимума;

2) $\lambda_2 \ne 0$, тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0,$$
$$x_1 - x_2 - 1 = 0,$$
$$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0,$$
$$-2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Получаем еще две условно-стационарные точки:

$$B:\ x_1^* = 2,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = -\frac{5}{3},\ \lambda_2^* = \frac{1}{6} > 0; \qquad C:\ x_1^* = -1,\ x_2^* = -2,\ \lambda_1^* = \frac{2}{3},\ \lambda_2^* = \frac{5}{6} > 0,$$

в которых удовлетворяются необходимые условия минимума.

4. Проверим выполнение достаточных условий экстремума первого порядка.

В точке A ограничение-неравенство не является активным, поэтому $l = 1 < n = 2$ и условия не выполняются. В точках B и C ограничение-неравенство активное, поэтому $l = n = 2$. В обеих точках $\lambda_2^* > 0$, поэтому в них достигается условный локальный минимум.

Проверим достаточные условия экстремума второго порядка из методических соображений (в точке A это требуется обязательно).

В точке A ограничение-неравенство не является активным:

$$d^2 L(A) = 2\lambda_2^* \, dx_1^2 + \left(2\lambda_2^* - 2\right) dx_2^2 = -2dx_2^2 ,$$

$$dg_1(A) = dx_1 - dx_2 = 0 .$$

Отсюда имеем: $dx_1 = dx_2$ и $d^2 L(A) = -2dx_1^2 < 0$ при $dx_1 \neq 0$. Поэтому в точке A – локальный условный максимум.

В точках B и C ограничение-неравенство активно.

$$d^2 L(B) = \frac{1}{3} dx_1^2 - \frac{5}{3} dx_2^2 ,$$

Исследуем точку B: $\quad dg_1(B) = dx_1 - dx_2 = 0,$

$$dg_2(B) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 4dx_1 + 2dx_2 = 0 .$$

Отсюда следует, что $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2 L(B) \equiv 0$, поэтому требуется дополнительное исследование.

$$d^2 L(C) = \frac{5}{3} dx_1^2 - \frac{1}{3} dx_2^2 ,$$

Исследуем точку C: $\quad dg_1(C) = dx_1 - dx_2 = 0,$

$$dg_2(C) = -2dx_1 - 4dx_2 = 0 .$$

Отсюда имеем: $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2 L(C) \equiv 0$. Требуется дополнительное исследование.

Из рис. 4 следует, что в точке B – условный локальный минимум, а в точке C – условный глобальный минимум.

5. Значения функции в точках экстремума: $f(A) = \frac{5}{4}, f(B) = 1, f(C) = -5$. ■

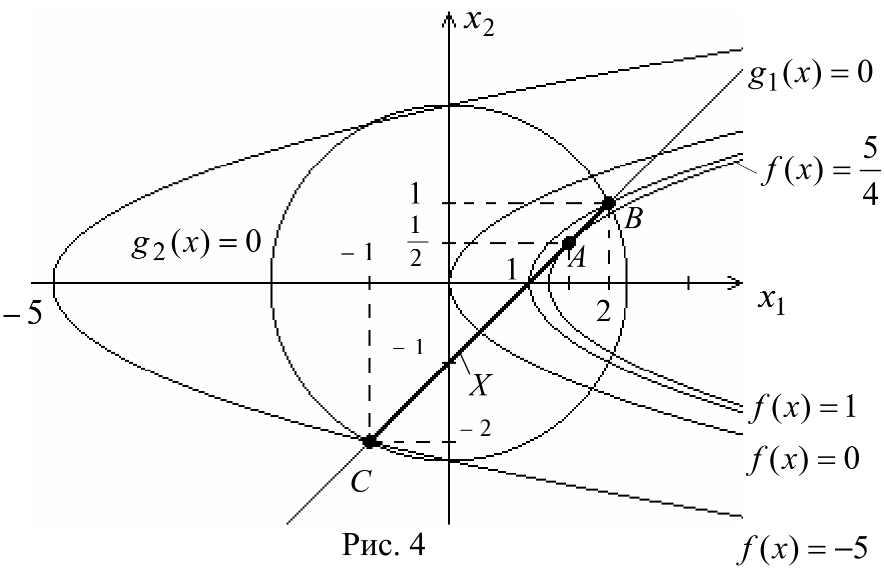

Рис. 4

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

МЕТОД ШТРАФОВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,\ldots,p$, определяющие множество допустимых решений *X*.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1,\ldots,m; \quad m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1,\ldots,p \end{array} \right\}.$

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальную точку x^0, начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$, число $C > 1$ для увеличения параметра, малое число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

Шаг 2. Составить вспомогательную функцию

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{r^k}{2}\left\{\sum_{j=1}^{m}[g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}[g_j^+(x)]^2\right\}.$$

Шаг 3. Найти точку $x^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F\left(x, r^k\right)$ по x с помощью какого-либо метода (нулевого, первого или второго порядка):

$$F\left(x^*(r^k), r^k\right) = \min_{x \in R^n} F\left(x, r^k\right).$$

При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять x^k. Вычислить $P\left(x^*(r^k), r^k\right)$.

Шаг 4. Проверить условие окончания:

а) если $P\left(x^*(r^k), r^k\right) \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*(r^k), \qquad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right);$$

б) если $P\left(x^*(r^k), r^k\right) > \varepsilon$, положить: $r^{k+1} = C\,r^k$, $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Пример 1. Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x^2 - 4x \to \min,$$
$$g_1(x) = x - 1 \le 0.$$

□ 1. В поставленной задаче $m = 0$ (ограничения-равенства отсутствуют), $p = 1$. Решим задачу аналитически при произвольном параметре штрафа r^k, а затем получим решение последовательности задач поиска безусловного минимума.

2. Составим вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = x^2 - 4x + \frac{r^k}{2}\left[\max\{0, (x-1)\}\right]^2.$$

3. Найдем безусловный минимум функции $F\left(x, r^k\right)$ по x с помощью необходимых и достаточных условий (см. гл. 2 – лекция 1):

$$\frac{\partial F\left(x, r^k\right)}{\partial x} = \begin{cases} 2x - 4 = 0, & x - 1 \le 0, \\ 2x - 4 + r^k(x-1) = 0, & x - 1 > 0. \end{cases}$$

Отсюда $x^* = 2$, но при этом не удовлетворяется условие $x^* - 1 \le 0$, а также

$$x^*(r^k) = \frac{4 + r^k}{2 + r^k}.$$

В табл. 1 приведены результаты расчетов при $r^k = 1, 2, 10, 100, 1000, \infty$, а на рис. 1 дана графическая иллюстрация процесса поиска решения.

Таблица 1

k	r^k	$x^*(r^k)$	$F\left(x^*(r^k), r^k\right)$
0	1	$\frac{5}{3}$	–3,66
1	2	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	–3,5
2	10	$\frac{7}{6} = 1{,}1666$	–3,166
3	100	$\frac{52}{51} = 1{,}0196$	–3,019
4	1000	$\frac{502}{501} = 1{,}00199$	–3,002
5	∞	1	–3

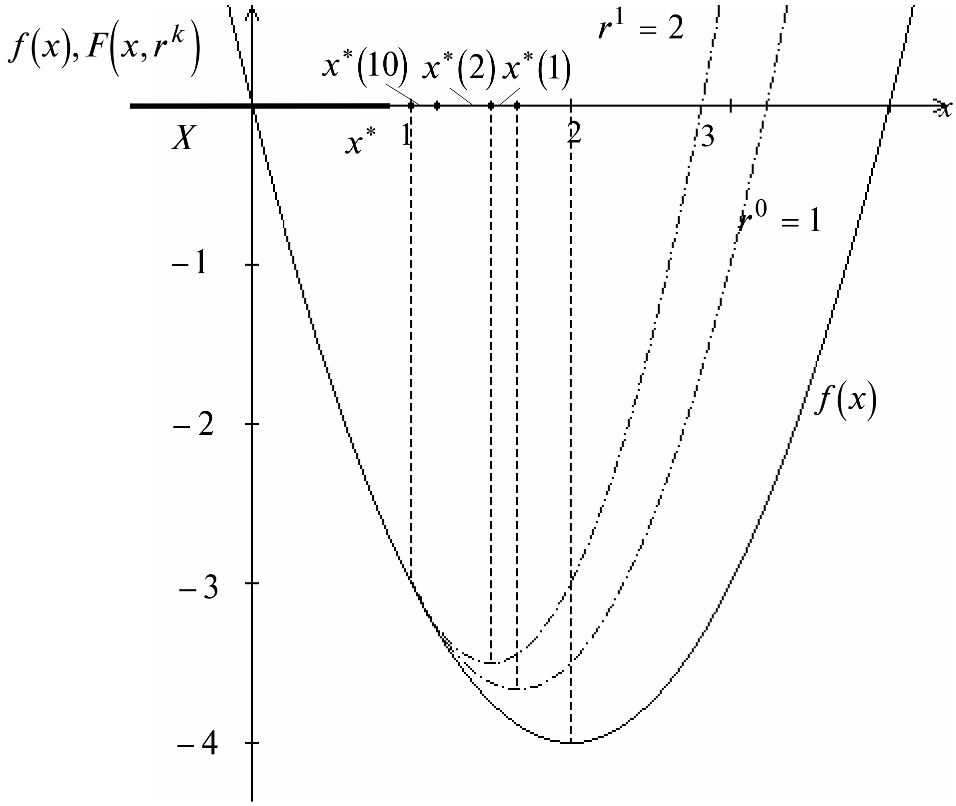

Рис. 1

Так как $\dfrac{\partial^2 F\left(x^*(r^k), r^k\right)}{\partial x^2} = 2 + r^k > 0$ при $r^k \ge 0$, то достаточные условия минимума $F\left(x, r^k\right)$ удовлетворяются. При $r^k \to \infty$ имеем

$$x^* = \lim_{r^k \to \infty} \frac{4 + r^k}{2 + r^k} = 1, \qquad f(x^*) = -3.$$

Найдем решение этой задачи с применением необходимых и достаточных условий экстремума. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0\left(x^2 - 4x\right) + \lambda_1(x - 1).$$

Необходимые условия минимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x} = \lambda_0(2x - 4) + \lambda_1 = 0$;

б) $x - 1 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$;

г) $\lambda_1(x - 1) = 0$.

Решим систему для двух случаев.

Первый случай: $\lambda_0 = 0$, тогда из условия «а» получаем $\lambda_1 = 0$, что не удовлетворяет утверждению.

Второй случай: $\lambda_0 \neq 0$. Поделив уравнения системы на λ_0 и заменив $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, получим $2x - 4 + \lambda_1 = 0$. Из условия «г» имеем $\lambda_1 = 0$ или $x = 1$. При $\lambda_1 = 0$ из условия «а» следует, что $x = 2$, но при этом не удовлетворяется условие «б». При $x^* = 1$ имеем $\lambda_1^* = 2$.

Достаточные условия минимума первого порядка удовлетворяются, так как $\lambda_1^* = 2 > 0$ и число активных ограничений $l = 1 = n$. ■

Пример 2. Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

□ 1. В поставленной задаче $m = 1$, ограничения-неравенства отсутствуют. Решим ее аналитически.

2. Составим вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{r^k}{2}(x_1 + x_2 - 2)^2.$$

3. Найдем безусловный минимум $F\left(x, r^k\right)$ по x с помощью необходимых и достаточных условий:

$$\frac{\partial F\left(x, r^k\right)}{\partial x_1} = 2x_1 + r^k(x_1 + x_2 - 2) = 0,$$
$$\frac{\partial F\left(x, r^k\right)}{\partial x_2} = 2x_2 + r^k(x_1 + x_2 - 2) = 0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $x_1 = x_2$ и $x_1^*(r^k) = x_2^*(r^k) = \frac{r^k}{1 + r^k}$.

В табл. 2 приведены результаты расчетов при $r^k = 1, 2, 10, 100, 1000, \infty$, а на рис. 2 дана графическая иллюстрация процесса поиска решения.

Таблица 2

k	r^k	$x_1^*(r^k) = x_2^*(r^k)$	$F\left(x^*(r^k), r^k\right)$
0	1	$\frac{1}{2}$	1
1	2	$\frac{2}{3}$	1,333
2	10	$\frac{10}{11}$	1,81
3	100	$\frac{100}{101}$	1,98
4	1000	$\frac{1000}{1001}$	1,998
5	∞	1	2

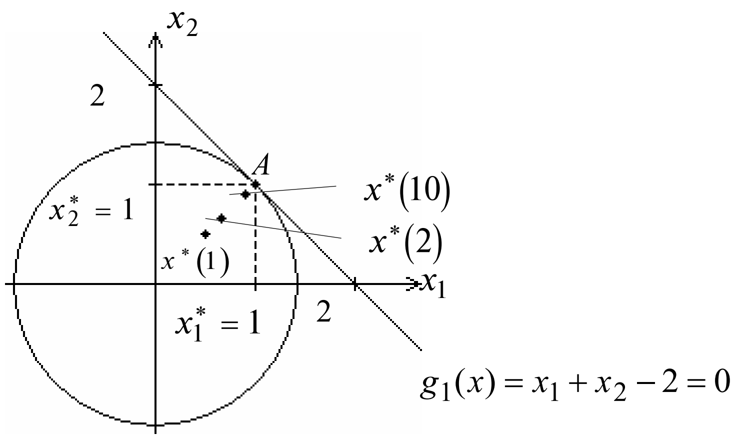

Рис. 2

Так как матрица Гессе $H\left(x^*(r^k), r^k\right) = \begin{pmatrix} 2+r^k & r^k \\ r^k & 2+r^k \end{pmatrix} > 0$ при $r^k > 0$, то достаточные условия безусловного минимума $F\left(x, r^k\right)$ удовлетворяются. При $r^k \to \infty$ имеем $\lim\limits_{r^k \to \infty} \dfrac{r^k}{1+r^k} = 1 = x_1^* = x_2^*$; $f(x^*) = 2$. ■