

Лекция 8

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРАХ МАТРИЦ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть A – действительная числовая квадратная матрица размеров $(n \times n)$. Ненулевой вектор $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ размеров $(n \times 1)$, удовлетворяющий условию

$$AX = \lambda X,$$

называется *собственным вектором* матрицы A . Число λ называется *собственным значением*. Говорят, что собственный вектор X соответствует (принадлежит) собственному значению λ .

Равенство равносильно однородной относительно X системе:

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad (X \neq 0).$$

Система имеет ненулевое решение для вектора X (при известном λ) при условии $|A - \lambda E| = 0$. Это равенство есть *характеристическое уравнение*:

$$|A - \lambda E| = P_n(\lambda) = 0,$$

где $P_n(\lambda)$ – *характеристический многочлен n -й степени*. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *характеристического уравнения* являются *собственными (характеристическими) значениями* матрицы A , а соответствующие каждому собственному значению $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, ненулевые векторы X^i , удовлетворяющие системе

$$AX^i = \lambda_i X^i \quad \text{или} \quad (A - \lambda_i E)X^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

являются *собственными векторами*.

Требуется найти собственные значения и собственные векторы заданной матрицы.

Различают *полную* и *частичную проблему собственных значений*, когда необходимо найти весь спектр (все собственные значения) и собственные векторы либо часть спектра, например: $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ и $\min_i |\lambda_i(A)|$. Величина $\rho(A)$ называется *спектральным радиусом*.

З а м е ч а н и я.

1. Если для собственного значения λ_i найден собственный вектор X^i , то вектор μX^i , где μ – произвольное число, также является собственным вектором, соответствующим этому же собственному значению λ_i .

2. Симметрическая матрица имеет полный спектр $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, действительных собственных значений; k -кратному корню характеристического уравнения симметрической матрицы соответствует ровно k линейно независимых собственных векторов.

А. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Для решения частичной проблемы собственных значений и собственных векторов в практических расчетах часто используется метод итераций (*степенной метод*). На его основе можно определить приближенно собственные значения матрицы A и *спектральный радиус* $\rho(A) = \max |\lambda_i(A)|$.

Пусть матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов $X^i, i = \overline{1, n}$, и собственные значения матрицы A таковы, что $\rho(A) = |\lambda_1(A)| > |\lambda_2(A)| \geq \dots \geq |\lambda_n(A)|$.

Методика решения задачи

Шаг 1. Выбрать произвольное начальное (нулевое) приближение собственного вектора $X^{1(0)}$ (второй индекс в скобках здесь и ниже указывает номер приближения, а первый индекс без скобок соответствует номеру собственного значения). Положить $k = 0$.

Шаг 2. Найти $X^{1(1)} = AX^{1(0)}$, $\lambda_1^{(1)} = \frac{x_i^{1(1)}}{x_i^{1(0)}}$, где i – любой номер $1 \leq i \leq n$, и положить $k = 1$.

Шаг 3. Вычислить $X^{1(k+1)} = AX^{1(k)}$.

Шаг 4. Найти $\lambda_1^{(k+1)} = \frac{x_i^{1(k+1)}}{x_i^{1(k)}}$, где $x_i^{1(k+1)}, x_i^{1(k)}$ – соответствующие координаты векторов $X^{1(k+1)}$ и $X^{1(k)}$. При этом может быть использована любая координата с номером $i, i = \overline{1, n}$.

Шаг 5. Если $\Delta = |\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| \leq \varepsilon$, процесс завершить и положить $\lambda_1 \cong \lambda_1^{(k+1)}$. Если $\Delta > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к п.3.

З а м е ч а н и я.

1. Процесс последовательных приближений

$$X^{1(1)} = AX^{1(0)}, \quad X^{1(2)} = AX^{1(1)} = A^2 X^{1(0)}, \dots,$$

$$X^{1(k)} = AX^{1(k-1)} = A \cdot A^{k-1} X^{1(0)} = A^k X^{1(0)}, \dots$$

сходится, т.е. при $k \rightarrow \infty$ вектор $X^{1(k)}$ стремится к собственному вектору X^1 .

2. Используя λ_1 , можно определить следующее значение λ_2 по формуле

$$\lambda_2 = \frac{x_i^{1(k+1)} - \lambda_1 x_i^{1(k)}}{x_i^{1(k)} - \lambda_1 x_i^{1(k-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Эта формула дает грубые значения для λ_2 , так как значение λ_1 является приближенным. Если модули всех собственных значений различны, то на основе последней формулы можно вычислять и остальные $\lambda_j (j = 3, 4, \dots, n)$.

3. После проведения некоторого числа итераций рекомендуется «гасить» растущие компоненты получающегося собственного вектора. Это осуществляется нормировкой вектора, например, по формуле $\frac{X^{1(k)}}{\|X^{1(k)}\|_1}$.

Пример 1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ найти спектральный радиус методом итераций с точностью $\varepsilon = 0,1$.

□ 1. Выбирается начальное приближение собственного вектора $X^{(0)} = (1; 1; 1)^T$. Положим $k = 0$.

2. Найдем

$$X^{1(1)} = A X^{1(0)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{1(1)}}{x_1^{1(0)}} = \frac{8}{1} = 8,$$

положим $k = 1$.

3. Вычислим

$$X^{1(2)} = A X^{1(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 38 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

4. Найдем

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{x_1^{1(2)}}{x_1^{1(1)}} = \frac{58}{8} = 7,25.$$

5. Так как $|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}| = 0,75 > \varepsilon$, то процесс необходимо продолжить.

Результаты вычислений удобно представить в виде табл. 1.

Таблица 1

k	$x_1^{1(k)}$	$x_2^{1(k)}$	$x_3^{1(k)}$	$\lambda_1^{(k)}$	$ \lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)} $
0	1	1	1	-	-
1	8	6	6	8	-
2	58	38	40	7,25	0,75
3	408	250	274	7,034	0,116
4	2838	1682	1888	6,9559	0,078 < ε

Точность по $\lambda_1^{(k)}$ достигнута на четвертой итерации. Таким образом, в качестве приближенного значения λ_1 берется 6,9559, а в качестве собственного вектора принима-

ется $X^1 = (2838, 1682, 1888)^T$. Так как собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя, то X^1 лучше пронормировать, т.е. поделить все его компоненты на величину нормы, например $\|X\|_1 = \max_i |X_i^1|$. Для рассматриваемого при-

мера получим
$$X^1 = \frac{1}{2838} \begin{pmatrix} 2838 \\ 1682 \\ 1888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 0,5927 \\ 0,6652 \end{pmatrix}.$$

В качестве собственного значения λ_1 можно взять не только отношение $\frac{x_1^{1(4)}}{x_1^{1(3)}} = \frac{2838}{408} = 6,9559$, но и $\frac{x_2^{1(4)}}{x_2^{1(3)}} = \frac{1682}{250} = 6,7280$; $\frac{x_3^{1(4)}}{x_3^{1(3)}} = \frac{1888}{274} = 6,8905$, а также их среднее арифметическое $\frac{6,9559 + 6,728 + 6,8905}{3} = 6,8581$. ■

Б. МЕТОД ВРАЩЕНИЙ

Метод используется для решения полной проблемы собственных значений симметрической матрицы и основан на преобразовании подобия исходной матрицы $A \in R^{n \times n}$ с помощью ортогональной матрицы H .

Две матрицы A и $A^{(i)}$ называются *подобными* ($A \sim A^{(i)}$ или $A^{(i)} \sim A$), если $A^{(i)} = H^{-1}AH$ или $A = HA^{(i)}H^{-1}$, где H – невырожденная матрица.

В методе вращений в качестве H берется *ортогональная матрица*, такая, что $HH^T = H^T H = E$, т.е. $H^T = H^{-1}$. В силу свойства ортогонального преобразования евклидова норма исходной матрицы A не меняется. Для преобразованной матрицы $A^{(i)}$ сохраняется ее след и собственные значения λ_i :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = \text{tr } A^{(i)}.$$

При реализации метода вращений преобразование подобия применяется к исходной матрице A многократно:

$$A^{(k+1)} = (H^{(k)})^{-1} A^{(k)} H^{(k)} = (H^{(k)})^T A^{(k)} H^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Формула определяет итерационный процесс, где начальное приближение $A^{(0)} = A$. На каждой k -й итерации для некоторого выбираемого при решении задачи недиагонального элемента $a_{ij}^{(k)}$, $i \neq j$, определяется ортогональная матрица $H^{(k)}$, приводящая этот элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ (а также и $a_{ji}^{(k+1)}$) к нулю. При этом на каждой итерации в качестве $a_{ij}^{(k)}$ выбирается наибольший по модулю. Матрица $H^{(k)}$, называемая *матрицей вращения Якоби*, зависит от угла $\varphi^{(k)}$ и имеет вид

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \cos \varphi^{(k)} & 0 & \dots & 0 & -\sin \varphi^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \sin \varphi^{(k)} & 0 & \dots & 0 & \cos \varphi^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}.$$

\uparrow i -й столбец \uparrow j -й столбец

$\leftarrow i$ -я строка
 $\leftarrow j$ -я строка

В данной ортогональной матрице элементы на главной диагонали единичные, кроме $h_{ii}^{(k)} = \cos \varphi^{(k)}$ и $h_{jj}^{(k)} = \cos \varphi^{(k)}$, а $h_{ij}^{(k)} = -\sin \varphi^{(k)}$, $h_{ji}^{(k)} = \sin \varphi^{(k)}$ (h_{ij} – элементы матрицы H).

Угол поворота $\varphi^{(k)}$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi^{(k)} = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} = \bar{P}_k; \quad \varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \bar{P}_k,$$

где $\left| 2\varphi^{(k)} \right| \leq \frac{\pi}{2}$, $i < j$ (элемент $a_{ij}^{(k)}$ выбирается в верхней треугольной наддиагональной части матрицы A). Заметим, что при $a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)}$ получается $\varphi^{(k)} = \frac{\pi}{4}$.

В процессе итераций сумма квадратов всех недиагональных элементов $\sigma(A^{(k)})$ при возрастании k уменьшается, так что $\sigma(A^{(k+1)}) < \sigma(A^{(k)})$. Элементы $a_{ij}^{(k)}$, приведенные к нулю на k -й итерации, на последующей итерации немного возрастают. При $k \rightarrow \infty$ получается монотонно убывающая ограниченная снизу нулем последовательность $\sigma(A^{(1)}) > \sigma(A^{(2)}) > \dots > \sigma(A^{(k)}) \dots$. Поэтому $\sigma(A^{(k)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это и означает сходимость метода. При этом $A^{(k)} \rightarrow \Lambda =$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Методика решения задачи

Шаг 1. Положить $k = 0$, $A^{(0)} = A$ и задать $\varepsilon > 0$.

Шаг 2. Выделить в верхней треугольной наддиагональной части матрицы $A^{(k)}$ максимальный по модулю элемент $a_{ij}^{(k)}$, $i < j$.

Если $|a_{ij}^{(k)}| \leq \varepsilon$ для всех $i \neq j$, процесс завершить. Собственные значения определяются по формуле $\lambda_i(A^{(k)}) = a_{ii}^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$.

Собственные векторы X^i находятся как i -е столбцы матрицы, получающейся в результате перемножения:

$$v_k = H^{(0)} H^{(1)} H^{(2)} \dots H^{(k-1)} = (X^1, X^2, X^3, \dots, X^n).$$

Если $|a_{ij}^{(k)}| > \varepsilon$, процесс продолжается.

Шаг 3. Найти угол поворота по формуле

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \quad (\text{при } a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)} \text{ получается } \varphi^{(k)} = \frac{\pi}{4}).$$

Шаг 4. Составить матрицу вращения $H^{(k)}$.

Шаг 5. Вычислить очередное приближение

$$A^{(k+1)} = (H^{(k)})^T A^{(k)} H^{(k)}.$$

Положить $k = k + 1$ и перейти к п.2.

З а м е ч а н и я.

1. Контроль правильности выполнения действий на каждой итерации осуществляется путем проверки сохранения следа преобразуемой матрицы.

2. При $n = 2$ для решения задачи требуется одна итерация.

Пример 2. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ методом вращений найти собственные значения и собственные векторы.

□ 1. Положим $k = 0$, $A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 10^{-10}$.

2⁰. Выше главной диагонали имеется только один элемент $a_{ij} = a_{12} = 1$.

3⁰. Находим угол поворота матрицы, используя в расчетах 11 цифр после запятой в соответствии с заданной точностью:

$$\operatorname{tg} 2\varphi^{(0)} = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} = \frac{2}{2-3} = -2; \quad \sin \varphi^{(0)} = -0,52573111212; \quad \cos \varphi^{(0)} = 0,85065080835.$$

4⁰. Сформируем матрицу вращения:

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi^{(0)} & -\sin \varphi^{(0)} \\ \sin \varphi^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85065080835 & 0,52573111212 \\ -0,52573111212 & 0,85065080835 \end{pmatrix}.$$

5⁰. Выполним первую итерацию:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \left(H^{(0)}\right)^T A^{(0)} H^{(0)} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,85065080835 & -0,52573111212 \\ 0,52573111212 & 0,85065080835 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85065080835 & 0,52573111212 \\ -0,52573111212 & 0,85065080835 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,38196601125 & -4,04620781325 \cdot 10^{-12} \\ -4,04587474634 \cdot 10^{-12} & 3,61803398874 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, след матрицы с заданной точностью сохраняется, т.е. $\sum_{i=1}^2 a_{ii}^{(1)} = \sum_{i=1}^2 a_{ii}^{(0)} = 5$. Положим $k = 1$ и перейдем к п.2.

2¹. Максимальный по модулю наддиагональный элемент $|a_{12}| = 4,04620781325 \cdot 10^{-12} < \varepsilon = 10^{-10}$. Для решения задачи (подчеркнем, что $n = 2$) с принятой точностью потребовалась одна итерация, полученную матрицу можно считать диагональной. Найдены следующие собственные значения и собственные векторы:

$$\lambda_1 = 1,38196601125; \quad \lambda_2 = 3,61803398874;$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0,85065080835 \\ -0,52573111212 \end{pmatrix}; \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0,52573111212 \\ 0,85065080835 \end{pmatrix}. \blacksquare$$