Лекция 7

Раздел II. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается проблема решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), записываемых в виде

$$Ax = b \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ – действительная матрица размеров $(n \times n)$, i, j – переменные, соответствующие номерам строк и столбцов (целые числа); $b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in R^n$ – вектор-столбец размеров $(n \times 1)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$ – вектор-столбец неизвестных, R^n – n-мерное евклидово пространство, верхний индекс "T" здесь и далее обозначает операцию транспонирования.

Требуется найти решение $x_* = (x_{*1}, \ldots, x_{*n})^T \in R^n$ системы, подстановка которого в систему приводит к верному равенству $A x_* = b$.

З а м е ч а н и я.

1. Из курса линейной алгебры известно, что решение задачи существует и единственно, если определитель (детерминант) матрицы A отличен от нуля, т.е. $\det A \equiv |A| \neq 0$ (A – невырожденная матрица, называемая также неособенной).

Классификация численных методов решения СЛАУ

При решении СЛАУ используются два класса численных методов:

1. *Прямые методы*, позволяющие найти решение за определенное число операций. К прямым методам относятся: метод Гаусса и его модификации (в том числе метод прогонки), метод LU – разложения и др. Изучаются в курсе линейной алгебры.

2. *Итерационные методы,* основанные на использовании повторяющегося (циклического) процесса и позволяющие получить решение в результате последовательных приближений. Операции, входящие в повторяющийся процесс, составляют *итерацию*. К итерационным методам относятся: метод простых итераций, метод Зейделя и др.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

А. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Альтернативой прямым методам являются итерационные методы, основанные на многократном уточнении $x^{(0)}$ – приближенно заданного решения задачи $A x = b$. Верхним индексом в скобках здесь и далее по тексту обозначается номер итерации (совокупности повторяющихся действий).

Методика решения задачи

Шаг 1. Исходная задача $A\,x = b$ преобразуется к равносильному виду:

$$x = \alpha\, x + \beta,$$

где $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$ – квадратная матрица, $\beta = \{\beta_i\}$ – вектор, $i, j = 1,\ldots,n$. Это преобразование может быть выполнено различными путями, но для обеспечения сходимости итераций (см. процедуру 2) нужно добиться, чтобы $\|\alpha\| < 1$ (чтобы норма α была меньше единицы. Понятие нормы вводится ниже.)

Шаг 2. Вектор β принимается в качестве начального приближения $x^{(0)} = \beta$ и далее многократно выполняются действия по уточнению решения согласно рекуррентному соотношению

$$x^{(k+1)} = \alpha\, x^{(k)} + \beta, \qquad k = 0,1,\ldots$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1\,,\\
x_2^{(k+1)} &= \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2\,,\\
&\vdots\\
x_n^{(k+1)} &= \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n\,.
\end{aligned}$$

Шаг 3. Итерации прерываются при выполнении условия

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon\,,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность, которую необходимо достигнуть при решении задачи.

З а м е ч а н и я.

1. Процесс называется *параллельным итерированием*, так как для вычисления $(k+1)$-го приближения всех неизвестных учитываются вычисленные ранее их k-е приближения.

2. Начальное приближение $x^{(0)}$ может выбираться произвольно, или из некоторых соображений, например $x^{(0)} = \beta$. При этом может использоваться априорная информация о решении или просто «грубая» прикидка.

Нормы матриц и векторов

Наиболее употребительными являются следующие формулы для вычисления значений норм матриц и векторов, образованных действительными компонентами.

Нормы матрицы A	***Нормы вектора*** x
1) $\| A \|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert$;	$\| x \|_1 = \max\limits_i \lvert x_i \rvert$;
2) $\| A \|_2 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert$;	$\| x \|_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert$;
3) $\| A \|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$;	$\| x \|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Скорость сходимости

Рассмотрим последовательность $\left\{ x^{(k)} \right\}$, сходящуюся к x_*. Предположим, что все ее элементы различны и ни один из них не совпадает с x_*. Наиболее эффективный способ оценивания скорости сходимости состоит в сопоставлении расстояния между $x^{(k+1)}$ и x_* с расстоянием между $x^{(k)}$ и x_*.

Последовательность $\left\{ x^{(k)} \right\}$ называется *сходящейся с порядком* p, если p – максимальное число, для которого

$$0 \le \lim_{k \to \infty} \frac{\left\| x^{(k+1)} - x_* \right\|}{\left\| x^{(k)} - x_* \right\|^p} < \infty .$$

Поскольку величина p определяется предельными свойствами $\left\{ x^{(k)} \right\}$, она называется *асимптотической скоростью сходимости*.

Если последовательность $\left\{ x^{(k)} \right\}$ – сходящаяся с порядком p, то число

$$c = \lim_{k \to \infty} \frac{\left\| x^{(k+1)} - x_* \right\|}{\left\| x^{(k)} - x_* \right\|^p}$$

называется *асимптотическим параметром ошибки*.

Если $p = 1$, $c < 1$, то сходимость *линейная*, если $p = 2$ – *квадратичная*, если $p = 3$ – *кубичная* и т.д. Если $p > 1$ или $p = 1, c = 0$, то сходимость *сверхлинейная*. Линейная сходимость является синонимом сходимости со скоростью геометрической прогрессии. Сверхлинейная сходимость является более быстрой, чем определяемая любой геометрической прогрессией.

Теоремы о сходимости

Теорема (о достаточном условии сходимости метода простых итераций). *Метод простых итераций, реализующийся в процессе последовательных приближений, сходится к единственному решению исходной системы $Ax = b$ при любом начальном приближении $x^{(0)}$ со скоростью не медленнее геометрической прогрессии, если какая-либо норма матрицы α меньше единицы, т.е.* $\|\alpha\|_s < 1$ ($s \in \{1,2,3\}$).

З а м е ч а н и я.

1. Сходящийся процесс обладает свойством *самоисправляемости*, т.е. отдельная ошибка в промежуточных вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное.

2. Условия сходимости выполняются, если в матрице A диагональные элементы преобладают, т.е.

$$|a_{ii}| \ge |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|, \quad i = 1,\ldots,n,$$

и хотя бы для одного i неравенство строгое. Иначе, модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов (свободные члены не рассматриваются).

3. Чем меньше величина нормы $\|\alpha\|$, тем быстрее сходимость метода.

Способы преобразования системы

Преобразование системы $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$ с матрицей α, удовлетворяющей условиям сходимости, может быть выполнено несколькими способами. Приведем способы, используемые наиболее часто.

1. Уравнения, входящие в систему $Ax = b$, переставляются так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов (для той же цели можно использовать другие элементарные преобразования). Затем первое уравнение разрешается относительно x_1, второе – относительно x_2 и т.д. При этом получается матрица α с нулевыми диагональными элементами.

Например, система

$$\begin{aligned} -2{,}8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 60, \\ 10x_1 - x_2 + 8x_3 &= 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}6x_3 &= 20 \end{aligned}$$

с помощью перестановки уравнений приводится к виду

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 8x_3 &= 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}6x_3 &= 20, \\ -2{,}8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 60, \end{aligned}$$

где $|10| > |-1| + |8|$, $|2| > |-1| + |-0{,}6|$, $|4| > |-2{,}8| + |1|$, т.е. диагональные элементы преобладают.

Выражая x_1 из первого уравнения, x_2 – из второго, а x_3 – из третьего, получаем систему

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \cdot x_1 + 0{,}1x_2 - 0{,}8x_3 + 1,\\
x_2 &= 0{,}5x_1 + 0 \cdot x_2 + 0{,}3x_3 + 10,\\
x_3 &= 0{,}7x_1 - 0{,}25x_2 + 0 \cdot x_3 + 15,
\end{aligned}
$$

где $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}8 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & -0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $\|\alpha\|_1 = \max\{0{,}9;0{,}8;0{,}95\} = 0{,}95 < 1$, т.е. условие теоремы выполнено.

Проиллюстрируем применение других элементарных преобразований. Так, система

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + 9x_3 &= -7,\\
3x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= -6,\\
x_1 + x_2 - 8x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

путем сложения первого и третьего уравнений и вычитания из второго уравнения третьего уравнения преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0,\\
2x_1 + 7x_2 + x_3 &= -13,\\
x_1 + x_2 - 8x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

с преобладанием диагональных элементов.

2. Уравнения преобразуются так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов, но при этом коэффициенты α_{ii} не обязательно равнялись нулю.

Например, систему

$$
\begin{aligned}
1{,}02\,x_1 - 0{,}15\,x_2 &= 2{,}7,\\
0{,}8\,x_1 + 1{,}05\,x_2 &= 4
\end{aligned}
$$

можно записать в форме

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -0{,}02\,x_1 + 0{,}15\,x_2 + 2{,}7,\\
x_2 &= -0{,}8\,x_1 - 0{,}05\,x_2 + 4,
\end{aligned}
$$

для которой $\|\alpha\|_1 = \max\{0{,}17;0{,}85\} = 0{,}85 < 1$.

3. Если $\det A \neq 0$, систему $Ax = b$ следует умножить на матрицу $D = A^{-1} - \varepsilon$, где $\{\varepsilon_{ij}\}$ – матрица с малыми по модулю элементами. Тогда получается система

$(A^{-1} - \varepsilon)Ax = D\,b$ или $A^{-1}A\,x - \varepsilon A\,x = D\,b$, которую можно записать в форме $x = \alpha x + \beta$, где $\alpha = \varepsilon\,A$, $\beta = D\,b$. Если $\left|\varepsilon_{ij}\right|$, $i, j = 1,\dots,n$, достаточно малы, условие сходимости выполняется.

Б. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Этот метод является модификацией метода простых итераций и в некоторых случаях приводит к более быстрой сходимости.

Итерации по методу Зейделя отличаются от простых итераций тем, что при нахождении i-й компоненты $(k+1)$-го приближения сразу используются уже найденные компоненты $(k+1)$-го приближения с меньшими номерами $1,2,\dots,i-1$. При рассмотрении развернутой формы системы итерационный процесс записывается в виде

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1,\\
x_2^{(k+1)} &= \alpha_{21}\boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2,\\
x_3^{(k+1)} &= \alpha_{31}\boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{32}\boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{33}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3,\\
&\vdots\\
x_n^{(k+1)} &= \alpha_{n1}\boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{n2}\boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{n3}\boxed{x_3^{(k+1)}} + \dots + \alpha_{nn-1}\boxed{x_{n-1}^{(k+1)}} + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

В каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений, что показано в записи стрелками.

Теорема о сходимости

Теорема (о достаточном условии сходимости метода Зейделя).

Если для системы $x = \alpha x + \beta$ какая-либо норма матрицы α меньше единицы, т.е. $\|\alpha\|_s < 1$ ($s \in \{1,2,3\}$), то процесс последовательных приближений сходится к единственному решению исходной системы $Ax = b$ при любом начальном приближении $x^{(0)}$.

Записывая (1.1) в матричной форме, получаем

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + \beta, \tag{1.2}$$

где L, U являются разложениями матрицы α:

$$L=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\ \alpha_{21}&0&0&\cdots&0\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&0&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\alpha_{n3}&\cdots&0\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\cdots&\alpha_{1n}\\ 0&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\cdots&\alpha_{2n}\\ 0&0&\alpha_{33}&\cdots&\alpha_{3n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&\cdots&\alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

Преобразуя (1.2) к виду $x=\alpha x+\beta$, получаем матричную форму итерационного процесса метода Зейделя:

$$x^{(k+1)}=\left(E-L\right)^{-1}U\,x^{(k)}+\left(E-L\right)^{-1}\beta. \tag{1.3}$$

З а м е ч а н и я.

1. Для обеспечения сходимости метода Зейделя требуется преобразовать систему $Ax=b$ к виду $x=\alpha x+\beta$ с преобладанием диагональных элементов в матрице α (см. метод простых итераций).

Например, в системе

$$\begin{aligned}2x_1+x_2&=2,\\ x_1-2x_2&=-2\end{aligned}$$

диагональные элементы преобладают, так как $|2|>1$, $|-2|>1$.

Соотношения метода Зейделя (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)}&=-\frac{x_2^{(k)}}{2}+1,\\ x_2^{(k+1)}&=\frac{x_1^{(k+1)}}{2}+1.\end{aligned}$$

Выберем в качестве начального приближения $x^{(0)}=(0\,;0)^T$ (рис.1,*а*). Тогда $x_1^{(1)}=-\frac{x_2^{(0)}}{2}+1=1$. Так как при этом $x_2^{(0)}=0$, то вычислению $x_1^{(1)}$ соответствует движение по горизонтали до пересечения с прямой, описываемой первым уравнением. Далее $x_2^{(1)}=\frac{x_1^{(1)}}{2}+1=\frac{3}{2}$. Вычислению $x_2^{(1)}$ соответствует движение по вертикали до пересечения с прямой, описываемой вторым уравнением. Продолжая вычисления, получаем $x_1^{(2)}=-\frac{x_2^{(1)}}{2}+1=-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$, $x_2^{(2)}=\frac{x_1^{(2)}}{2}+1= \;=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$ и т.д. В результате имеем процесс, *сходящийся* к точке $x_*=\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)^T$.

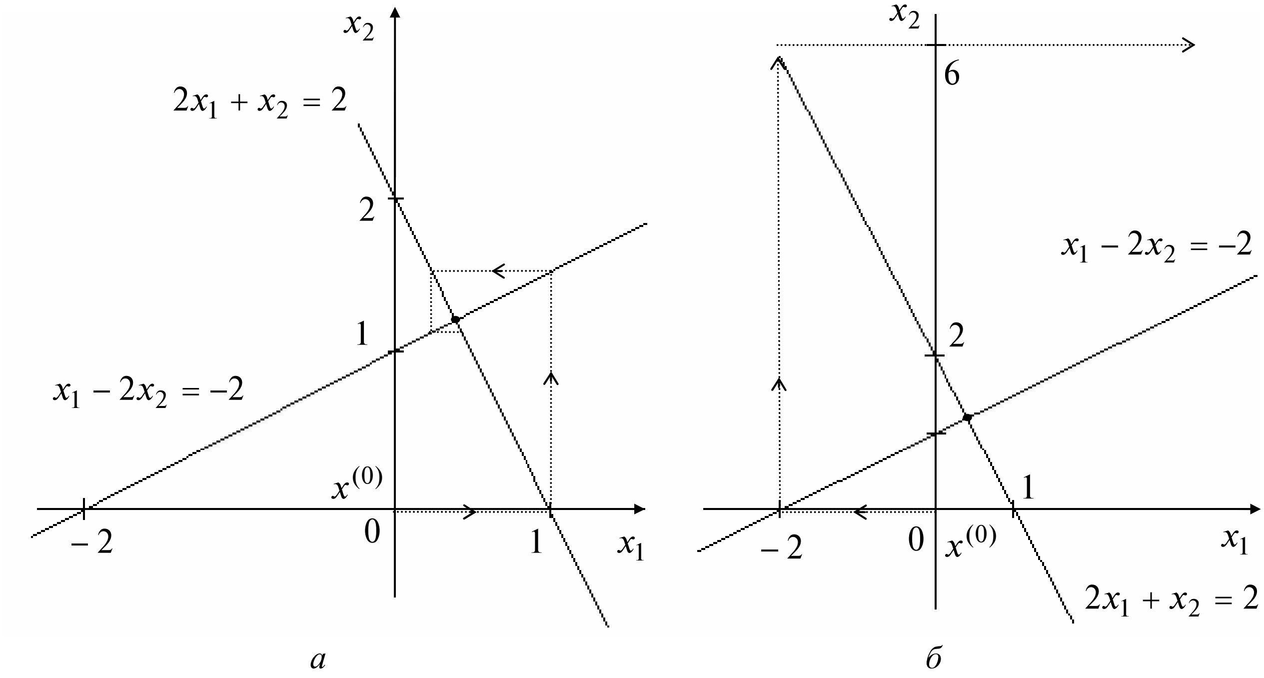

Рис. 1

Переставим уравнения в системе:

$$x_1 - 2x_2 = -2,$$
$$2x_1 + x_2 = 2.$$

В полученной системе диагональные элементы не преобладают. Уравнения метода Зейделя имеют вид

$$x_1^{(k+1)} = 2x_2^{(k)} - 2,$$
$$x_2^{(k+1)} = -2x_1^{(k+1)} + 2.$$

При $x^{(0)} = (0\,;0)^T$ получаем $x_1^{(1)} = -2$, $x_2^{(1)} = 6$ и т.д. В результате имеем *расходящийся процесс* (рис. 1,*б*).

2. Условие преобладания диагональных элементов является достаточным для сходимости, но не является необходимым.

3. Процесс (1.1) называется *последовательным итерированием*, так как на каждой итерации полученные из предыдущих уравнений значения подставляются в последующие. Как правило, метод Зейделя обеспечивает лучшую сходимость, чем метод простых итераций (за счет накопления информации). Метод Зейделя может сходиться, если расходится метод простых итераций, и наоборот.

4. При расчетах на компьютере удобнее пользоваться формулой (1.3).

5. Преимуществом метода Зейделя, как и метода простых итераций, является его *самоисправляемость*.

6. Метод Зейделя имеет преимущества перед методом простых итераций, так как он всегда сходится для *нормальных* систем линейных алгебраических уравнений, т.е. таких систем, в которых матрица A является симметрической и положительно определенной. Систему линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей A всегда можно преобразовать к нормальной, если ее умножить слева на матрицу A^T. Таким образом, система $A^T Ax = A^T b$ является нормальной, а матрица $A^T A$ - симметрической.