Лекция 5

5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

А. МЕТОД ШТРАФОВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1, \ldots, p$, определяющие множество допустимых решений *X*.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве *X*, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, m; \quad m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1, \ldots, p \end{array} \right\}.$

Стратегия поиска

Идея метода заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска безусловного минимума *вспомогательной функции*:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + P\left(x, r^k\right) \to \min_{x \in R^n},$$

где $P\left(x, r^k\right)$ – *штрафная функция*, r^k – параметр штрафа, задаваемый на каждой *k*-й итерации. Это связано с возможностью применения эффективных и надежных методов поиска безусловного экстремума.

Штрафные функции конструируются, исходя из условий:

$$P\left(x, r^k\right) = \begin{cases} 0, & \text{при выполнении ограничений,} \\ > 0, & \text{при невыполнении ограничений,} \end{cases}$$

причем при невыполнении ограничений и $r^k \to \infty$, $k \to \infty$ справедливо $P(x, r^k) \to \infty$.

Чем больше r^k, тем больше штраф за невыполнение ограничений. Как правило, для ограничений типа равенств используется квадратичный штраф, а для ограничений типа неравенств – квадрат срезки:

$$P\left(x, r^k\right) = \frac{r^k}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{m} [\, g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p} [\, g_j^+(x)]^2 \right\},$$

где $g_j^+(x)$ – *срезка функции*:

$$g_j^+(x) = \max\{\ 0, g_j(x)\ \} = \begin{cases} g_j(x), & g_j(x) > 0, \\ 0, & g_j(x) \le 0. \end{cases}$$

Начальная точка поиска задается обычно вне множества допустимых решений X. На каждой k-й итерации ищется точка $x^*(r^k)$ минимума вспомогательной функции $F(x, r^k)$ при заданном параметре r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации. Полученная точка $x^*(r^k)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при возрастающем значении параметра штрафа. При неограниченном возрастании r^k последовательность точек $x^*(r^k)$ стремится к точке условного минимума x^*.

З а м е ч а н и я.

1. Так как сходимость метода обеспечивается при $r^k \to \infty$, то возникает вопрос о том, нельзя ли получить решение исходной задачи в результате однократного поиска безусловного минимума вспомогательной функции с параметром r^k, равным большому числу, например 10^{20}. Однако такая замена последовательного решения вспомогательных задач не представляется возможной, так как с ростом r^k функция $F(x, r^k)$ приобретает ярко выраженную «овражную» структуру.

2. Точки $x^*(r^k)$ в алгоритме – это точки локального минимума функции $F(x, r^k)$. Однако функция $F(x, r^k)$ может быть неограниченной снизу и процедуры методов безусловной минимизации могут расходиться. Эти обстоятельства необходимо учитывать при программной реализации.

3. Обычно выбирается $r^0 = 0{,}01; 0{,}1; 1$, $C \in [4, 10]$, а $r^{k+1} = Cr^k$. Иногда начинают с $r^0 = 0$, т.е. с задачи поиска безусловного минимума.

4. При решении задач процедура расчетов завершается при некотором конечном значении параметра штрафа r^k. При этом приближенное решение, как правило, не лежит в множестве допустимых решений, т.е. ограничения задачи не выполняются. Это является одним из недостатков метода. С ростом параметра штрафа r^k генерируемые алгоритмом точки приближаются к решению исходной задачи извне множества допустимых решений. Поэтому обсуждаемый метод иногда называют *методом внешних штрафов*.

5. На практике для получения решения исходной задачи с требуемой точностью достаточно бывает решить конечное (относительно небольшое) число вспомогательных задач. При этом нет необходимости решать их точно, а информацию, полученную в результате решения очередной вспомогательной задачи, обычно удается эффектно использовать для решения следующей.

Б. МЕТОД БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ и функции ограничений-неравенств $g_j(x) \le 0$, $j = 1, \dots, m$, определяющие множество допустимых решений *X*.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \mid g_j(x) \le 0,\ j = 1, \dots, m \right\}$.

Стратегия поиска

Идея метода заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска безусловного минимума *вспомогательной функции* $F\left(x, r^k\right) = f(x) + P\left(x, r^k\right)$, где $P\left(x, r^k\right)$ – штрафная функция, $r^k \ge 0$ – параметр штрафа.

Как правило, используются:

а) *обратная штрафная функция* $P\left(x, r^k\right) = -\, r^k \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{g_j(x)}$;

б) *логарифмическая штрафная функция* $P\left(x, r^k\right) = -r^k \sum\limits_{j=1}^{m} \ln\left[-g_j(x)\right]$

Обе штрафные функции определены и непрерывны внутри множества *X*, т.е. на множестве $\left\{ x \mid g_j(x) < 0,\ j = 1, \dots, m \right\}$, и стремятся к бесконечности при приближении к границе множества изнутри. Поэтому они называются *барьерными функциями*. При $r^k > 0$ штрафная функция, задаваемая обратной функцией, положительна. Логарифмическая штрафная функция положительна при $-1 < g(x) < 0$ и отрицательна при $g(x) < -1$, т.е. внутренним точкам области отдается предпочтение перед граничными точками.

Начальная точка задается только внутри множества *X*. На каждой *k*-й итерации ищется точка $x^*(r^k)$ минимума вспомогательной функции $F\left(x, r^k\right)$ при заданном параметре r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации. Полученная точка $x^*(r^k)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при уменьшающемся значении параметра штрафа. При $r^k \to +0$ последовательность точек $x^*(r^k)$ стремится к точке условного минимума x^*. Барьерные функции как бы препятствуют выходу из множества *X*, а если решение задачи лежит на границе, то процедура метода приводит к движению изнутри области к границе.

Заметим, что согласно описанной процедуре точки $x^*(r^k)$ лежат внутри множества допустимых решений для каждого r^k. Этим объясняется то, что метод барьерных функций иногда называется *методом внутренних штрафов*.

З а м е ч а н и я.

1. Обычно выбирается $r^0 = 1,10,100$, параметр $C = 10;12;16$, а $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$.

2. При $r^k \to +0$ обеспечивается сходимость, однако с уменьшением r^k функция $F\left(x, r^k\right)$ становится все более «овражной». Поэтому полагать r^k малым числом сразу нецелесообразно.

В. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1, \ldots, p$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X, т.е. такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, m; \quad m < n \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1, \ldots, p \end{array} \right\}$.

Стратегия поиска

Для ограничений типа равенств применяется метод штрафов (внешних штрафов), а для ограничений-неравенств – метод барьерных функций (внутренних штрафов).

Задача на условный минимум сводится к решению последовательности задач поиска минимума *смешанной вспомогательной функции*:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \frac{1}{g_j(x)}$$

или

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \ln[-g_j(x)],$$

где $r^k \ge 0$ – параметр штрафа.

Начальная точка задается так, чтобы ограничения-неравенства строго выполнялись: $g_j(x) < 0$, $j = m+1, \ldots, p$. На каждой k-й итерации ищется точка $x^*(r^k)$ минимума смешанной вспомогательной функции при заданном параметре r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации. Полученная точка $x^*(r^k)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при уменьшающемся значении параметра штрафа. При $r^k \to +0$ последовательность точек $x^*(r^k)$ стремится к точке условного минимума x^*.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальную точку x^0 так, чтобы $g_j(x) < 0$, $j = m+1, \dots, p$; начальное значение параметра штрафа $r^0 > 0$; число $C > 1$ для уменьшения параметра штрафа; малое число ε для остановки алгоритма. Положить $k = 0$.

Шаг 2. Составить смешанную вспомогательную функцию:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \frac{1}{g_j(x)} = f\left(x\right) + P\left(x, r^k\right)$$

или

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \ln[-g_j(x)] = f\left(x\right) + P\left(x, r^k\right).$$

Шаг 3. Найти точку $x^*(r^k)$ минимума функции $F\left(x, r^k\right)$ с помощью какого-либо метода поиска безусловного минимума с проверкой выполнения справедливости неравенств: $g_j(x) < 0$, $j = m+1, \dots, p$. При этом задать все требуемые выбранным методом параметры. В качестве начальной точки взять x^k.

Шаг 4. Вычислить $P\left(x^*(r^k), r^k\right)$ и проверить условие окончания:

а) если $\left|P\left(x^*(r^k), r^k\right)\right| \le \varepsilon$, процесс поиска закончить:

$$x^* = x^*(r^k), \quad f(x^*) = f\left(x^*(r^k)\right);$$

б) если $\left|P\left(x^*(r^k), r^k\right)\right| > \varepsilon$, то положить $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$, $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Замечания.

1. Метод предложен Фиакко и Мак-Кормиком (Fiacco, McCormick). Они рекомендуют $r^0 = 1$, $C = 4$.

2. Можно использовать разные параметры штрафа для внешних и внутренних штрафов.