Лекция 2

3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Общая постановка задачи и основные положения изложены в разд. 1. Здесь мы рассмотрим случаи, когда множество допустимых решений X задается равенствами и неравенствами, т.е.

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f(x)\,; \quad f(x^*) = \max_{x\in X} f(x)\,, \tag{3.1}$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} g_j(x) = 0,\; j = 1,\ldots,m;\;\; m < n \\ g_j(x) \le 0,\; j = m+1,\ldots,p \end{array} \right\}$, m и p – числа; $f(x)$ – целевая функция, $g_j(x), j = 1,\ldots,p$, – функции, задающие ограничения (условия).

Будем считать функции $f(x)$; $g_j(x), j = 1,\ldots,p$, дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве R^n, а функции $g_j(x)$, задающие ограничения, – называть для краткости просто ограничениями. При $p = m$ задача (3.1) со *смешанными ограничениями* преобразуется в задачу с *ограничениями типа равенств*, а при $m = 0$ в задачу с *ограничениями типа неравенств*.

Определение 3.1. Функция

$$L\left(x,\lambda_0,\lambda\right) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x) \tag{3.2}$$

называется *обобщенной функцией Лагранжа*, числа $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ – *множителями Лагранжа*, $\lambda = \left(\lambda_1,\ldots,\lambda_p\right)^T$. *Классической функцией Лагранжа* называется функция

$$L\left(x,\lambda\right) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x)\,. \tag{3.3}$$

Определение 3.2. *Градиентом обобщенной* (*классической*) *функции Лагранжа по* x называется вектор-столбец, составленный из ее частных производных первого порядка по x_i, $i = 1,\ldots,n$:

$$\nabla_x L(x,\lambda_0,\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\left[\nabla_x L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right].$$

Определение 3.3. *Вторым дифференциалом обобщенной* (*классической*) *функции Лагранжа* $L(x,\lambda_0,\lambda)$ $\left[L(x,\lambda)\right]$ называется функция

$$d^2L(x,\lambda_0,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_i\,dx_j\,, \tag{3.5}$$

$$\left[d^2L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_i\,dx_j\right].$$

Определение 3.4. *Первым дифференциалом ограничения* $g_j(x)$ называется функция

$$dg_j(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}\,dx_i,\qquad j=1,\ldots,p\,. \tag{3.6}$$

Определение 3.5. Ограничение $g_j(x)\le 0$ называется *активным* в точке x^*, если $g_j(x^*)=0$. Если $g_j(x^*)<0$, то ограничение называется *пассивным.*

Определение 3.6. Градиенты ограничений $g_1(x),\ldots,g_m(x)$ являются *линейно независимыми* в точке x^*, если равенство $\lambda_1\nabla g_1(x^*)+\lambda_2\nabla g_2(x^*)+\ldots+\lambda_m\nabla g_m(x^*)=0$ выполняется только при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$. Если существуют числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, одновременно не равные нулю, для которых равенство выполняется, то градиенты *линейно зависимы*. В этом случае один из них есть линейная комбинация остальных. Один вектор $\nabla g_1(x^*)$ тоже образует систему векторов: при $\nabla g_1(x^*)\ne 0$ линейно независимую, а при $\nabla g_1(x^*)=0$ линейно зависимую.

Система векторов, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима. Если $\mathrm{rang}A=\mathrm{rang}\left(\nabla g_1(x^*)\nabla g_2(x^*)\ldots\nabla g_m(x^*)\right)=m$, то система векторов линейно независима. Если $\mathrm{rang}\,A<m$, то система линейно зависима.

А. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА РАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x)=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x)=g_j\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0, j=1,\ldots,m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^*\in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*)=\min_{x\in X}f(x),\quad f(x^*)=\max_{x\in X}f(x), \tag{3.7}$$

где $X=\left\{x\,\middle|\,g_j(x)=0, j=1,\ldots,m;\ m<n\right\}$.

Утверждение 3.1 (необходимые условия экстремума первого порядка).

Пусть x^* *есть точка локального экстремума в задаче* (3.7). *Тогда найдутся числа* $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ *, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия*:

- *условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по* x:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \tag{3.8 а}$$

- *условие допустимости решения*:

$$g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \tag{3.8 б}$$

Если при этом градиенты $\nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_m(x^*)$ *в точке* x^* *линейно независимы* (*выполняется условие регулярности*), *то* $\lambda_0^* \neq 0$.

З а м е ч а н и я.

1. Точки x^*, удовлетворяющие системе при некоторых λ_0^*, λ^*, называются *условно-стационарными.*

2. При решении задач проверка условия регулярности затруднена, так как точка x^* заранее неизвестна. Поэтому, как правило, рассматриваются два случая: $\lambda_0^* = 0$ и $\lambda_0^* \neq 0$. Если $\lambda_0^* \neq 0$, в системе (3.8 а) полагают $\lambda_0^* = 1$. Это эквивалентно делению системы уравнений (3.8 а) на λ_0^* и замене $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*. При этом обобщенная функция Лагранжа становится классической, а сама система (3.8) имеет вид

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \tag{3.9 а}$$

$$g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \tag{3.9 б}$$

Здесь число уравнений равно числу неизвестных.

Точка экстремума, удовлетворяющая системе (3.8) при $\lambda_0^* \neq 0$, называется *регулярной*, а при $\lambda_0^* = 0$ – *нерегулярной.* Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений. При этом в обобщенной функции Лагранжа исчезает член, содержащий целевую функцию, а в необходимых условиях экстремума не используется информация, представляемая градиентом целевой функции.

Утверждение 3.2 (необходимые условия экстремума второго порядка).

Пусть x^* *– регулярная точка минимума* (*максимума*) *в задаче* (3.7) *и имеется решение* (x^*, λ^*) *системы* (3.9). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* (x^*, λ^*), *неотрицателен* (*неположителен*):

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \quad \left(d^2 L(x^*, \lambda^*) \leq 0\right) \tag{3.10}$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \quad j = 1,\dots,m. \tag{3.11}$$

Утверждение 3.3 (достаточные условия экстремума).

Пусть имеется точка (x^*,λ^*)*, удовлетворяющая системе* (3.9). *Если в этой точке*

$$d^2 L(x^*,\lambda^*) > 0 \ \left(d^2 L(x^*,\lambda^*) < 0\right) \tag{3.12}$$

для всех ненулевых $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \quad j = 1,\dots,m,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума* (*максимума*) *в задаче* (3.7).

З а м е ч а н и я.

1. Достаточные и необходимые условия экстремума второго порядка проверяются в условно-стационарных точках, которые удовлетворяют системе (3.8) при $\lambda_0^* \neq 0$ или системе (3.9), так как для практики, безусловно, представляет интерес случай, когда в функции Лагранжа присутствует целевая функция, экстремум которой ищется.

2. Иногда удается проверить условие линейной независимости градиентов ограничений на множестве X (см. определение 3.6.). Если оно выполняется, то на шаге 1 следует записать классическую функцию Лагранжа (3.3), на шаге 2 можно записывать сразу систему (3.9), а на шаге 3 отсутствует случай $\lambda_0^* = 0$.

3. Для нахождения графического решения задачи (при $n = 2, m = 1$) следует:

а) построить множество допустимых решений X;

б) построить семейство линий уровня целевой функции и найти точки их касания с кривыми, описывающими ограничения. Эти точки являются «подозрительными» на условный экстремум;

в) исследовать поведение целевой функции при движении вдоль ограничения к исследуемой точке и от нее. Классифицировать точки, используя определение экстремума (см. определения 1.1 и 1.2).

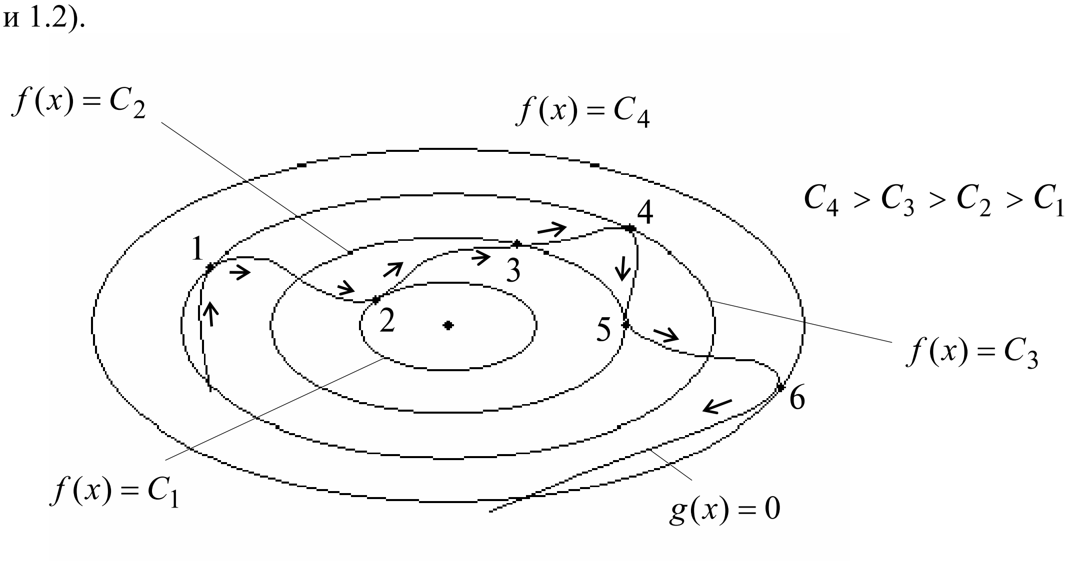

Рис. 1

На рис. 1 в точках 1 – 2, 4 – 6 линии уровня касаются ограничения. Исследование поведения функции в этих точках при движении по стрелкам показывает, что в точках 1, 4, 6 – локальный максимум, так как при приближении к ним функция возрастает, а затем убывает; в точках 2, 5 – локальный минимум, так как при приближении к ним функция убывает, а затем возрастает; в точке 3 нет условного экстремума, поскольку при приближении к ней и удалении дальше от нее функция возрастает.

4. При решении примеров для упрощения записи на шагах 2 и 3 алгоритма будем опускать знак «$*$», оставляя его только для значений x и λ, соответствующих условно-стационарным точкам.

Пример 1. Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на множестве $X = \left\{ x \,\middle|\, x_1 + x_2 - 2 = 0 \right\}$: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr}$, $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$.

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(1,1)^T \neq 0$, то условие выполняется (см. определение 3.6). Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа (3.3).

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_1) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{\lambda_1}{2}$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{\lambda_1}{2}$;

б) $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$.

3. Решение системы: $x_1^* = x_2^* = 1, \lambda_1^* = -2$ – условно-стационарная точка.

4. Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

а) $d^2 L(x^*, \lambda_1^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$, так как $\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2$,

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

б) $dg_1(x^*) = dx_1 + dx_2 = 0$, так как $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 1$;

в) выразим дифференциал dx_1 через dx_2: $dx_1 = -dx_2$ и подставим в $d^2 L$;

г) так как $d^2 L(x^*, \lambda_1^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке $x^* = (1,1)^T$ - регулярный локальный условный минимум.

5. Подсчитаем значение функции в точке условного экстремума: $f(x^*) = 2$.

Графическое решение задачи приведено на рис. 2.

Линии уровня функции $f(x)$ представляются окружностями, а множество допустимых решений X – графиком прямой. В точке $x^* = (1,1)^T$, $f(x^*) = 2$ достигается глобальный минимум (рис. 2). Глобальный максимум на данном множестве не существует. Заметим, что в точке x^* линии уровня целевой функции касаются кривой, описывающей ограничения. ■

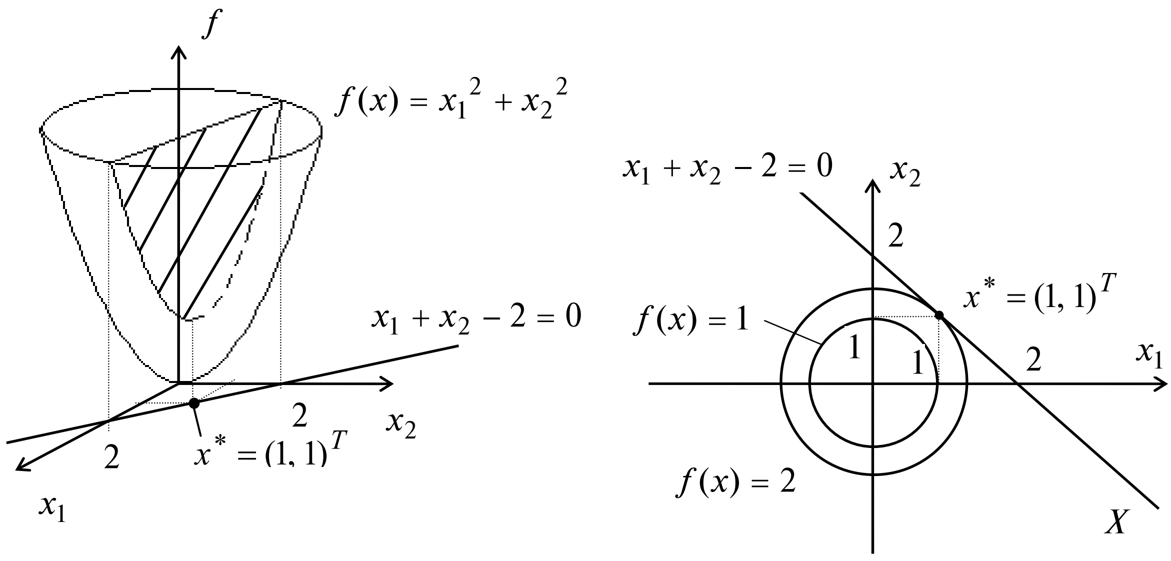

Рис. 2

Б. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j\left(x_1,\ldots,x_n\right) \le 0$, $j = 1,\ldots,m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f\left(x\right)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f(x); \qquad f(x^*) = \max_{x\in X} f(x), \tag{3.13}$$

где $X = \left\{ x \;\middle|\; g_j(x) \le 0,\ j = 1,\ldots,m \right\}$.

Утверждение 3.4 (необходимые условия минимума (максимума) первого порядка). *Пусть* x^* *– точка локального минимума (максимума) в задаче* (3.13). *Тогда найдется такое число* $\lambda_0^* \ge 0$ *и вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)^T$, *не равные одновременно нулю и такие, что выполняются условия*:

- *стационарности обобщенной функции Лагранжа по* x :

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n\ ; \tag{3.14 а}$$

- *допустимости решения*:

$$g_j(x^*) \le 0\,, \quad j = 1,\ldots,m; \tag{3.14 б}$$

- *неотрицательности для условного минимума*:

$$\lambda_j^* \ge 0, \quad j = 1, \dots, m \tag{3.14 в}$$

(*неположительности для условного максимума*: $\lambda_j^* \le 0$, $j = 1, \dots, m$);

- *дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_j^* \; g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \tag{3.14 г}$$

Если при этом градиенты активных в точке x^* ограничений линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^* \ne 0$.

З а м е ч а н и я.

1. Точки x^*, удовлетворяющие системе (3.14), называются *условно-стационарными*.

2. В отличие от случая ограничений типа равенств необходимые условия экстремума первого порядка формулируются отдельно для максимума и минимума.

3. Если в решаемой задаче ограничения записаны в форме $g_j(x) \ge 0$, то их необходимо переписать в виде, используемом в (3.13): $-g_j(x) \le 0$.

4. Далее будем использовать *множество индексов ограничений, активных в точке* x^*, которое обозначим через J_a.

5. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (3.18) при $\lambda_0^* \ne 0$, называется *регулярной*, а при $\lambda_0^* = 0$ – *нерегулярной*. Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений.

6. Из условия дополняющей нежесткости следует, что если ограничение в точке x^* пассивное, т.е. $g_j(x^*) < 0$, то $\lambda_j^* = 0$, а если – активное, т.е. $g_j(x^*) = 0$, то $\lambda_j^* \ge 0$ (для минимума) и $\lambda_j^* \le 0$ (для максимума).

Утверждение 3.5 (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая системе (3.14) *при $\lambda_0^* \ne 0$, число активных ограничений в точке x^* совпадает с числом n переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, то точка x^* – точка условного локального минимума. Если $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то x^* – точка условного локального максимума в задаче* (3.13).

Утверждение 3.6 (необходимое условие минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* – регулярная точка минимума (*максимума*) *в задаче* (3.13) *и имеется решение (x^*, λ^*) системы* (3.14). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке (x^*, λ^*), неотрицателен* (*неположителен*):

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \ge 0 \qquad (\, d^2 L(x^*, \lambda^*) \le 0 \,) \tag{3.15}$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* > 0\ \ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \le 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0.$$

Утверждение 3.7 (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), *удовлетворяющая системе* (3.14) *при* $\lambda_0^* \neq 0$. *Если в этой точке* $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$ $(d^2L(x^*, \lambda^*) < 0)$ *для всех ненулевых* $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* > 0\ \ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \le 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума (максимума) в задаче* (3.13).

Пример 2. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0.$$

☐ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 (x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 2).$$

2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + \lambda_1 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 2 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1 (x_1 + x_2 - 2) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

Первый случай: $\lambda_0 = 0$, тогда из условия «а» следует, что $\lambda_1 = 0$, а это противоречит требованию утверждения 3.4 о существовании ненулевого вектора $(\lambda_0, \lambda)^T$.

Второй случай: $\lambda_0 \neq 0$. Поделив уравнения приведенной в п. 2 системы на λ_0 и заменив $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, получим:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 2 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$.

Из условия «г» дополняющей нежесткости следует:

1) $\lambda_1 = 0$ (фактически решается задача поиска безусловного экстремума). Тогда $x_1^* = x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = 0$ и условие «б» выполняются. Выполняются необходимые условия и для минимума, и для максимума.

2) $\lambda_1 \ne 0$, тогда из системы

$$x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad 2x_1 + \lambda_1 = 0, \quad 2x_2 + \lambda_1 = 0$$

получим $x_1^* = x_2^* = 1$; $\lambda_1^* = -2$. Так как $\lambda_1^* < 0$, то необходимое условие минимума не выполняется (в точке $(1,1)^T$ нет минимума), но выполняется необходимое условие максимума. Таким образом, имеем две условно-стационарные точки.

4. Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

В точке $x^* = (0,0)^T$ ограничение не является активным, так как $g_1(x^*) = -2 < 0$, поэтому достаточные условия первого порядка не удовлетворяются. Проверим условия второго порядка. Так как $d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$ при $dx \ne 0$, то в точке $x^* = (0,0)^T$ – регулярный локальный условный минимум (рис.3).

В точке $x^* = (1,1)^T$ ограничение является активным, но $l = 1 < n = 2$, поэтому достаточное условие первого порядка не выполняется. Проверим условие второго порядка. Имеем

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2,$$

$$dg_1(x^*) = dx_1 + dx_2 = 0 \Rightarrow dx_1 = -dx_2.$$

Следовательно, $d^2L(x^*,\lambda^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \ne 0$. Так как в этой точке $\lambda_1^* = -2 < 0$, то достаточное условие максимума не выполняется. Проверим необходимое условие максимума второго порядка. Так как $d^2L(x^*,\lambda^*) = 4dx_2^2 \ge 0$ при любых dx_2, то необходимое условие максимума не выполняется, поэтому в точке $x^* = (1,1)^T$ максимума нет.

5. Вычислим значение функции в точке условного минимума: $f(x^*) = 0$. ■

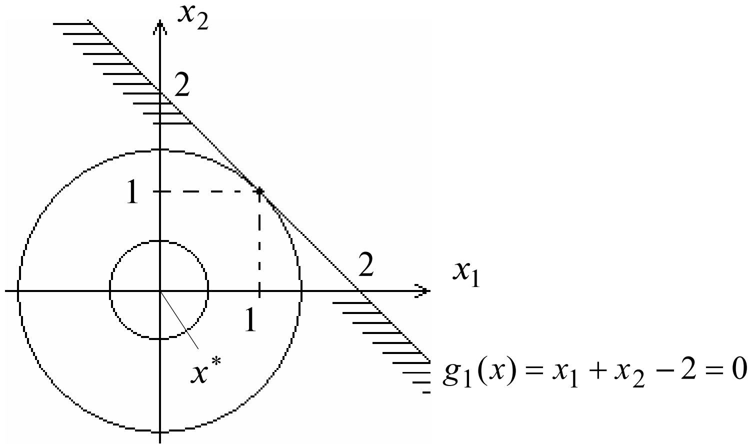

Рис. 3

В. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ и функции ограничений типа равенств и неравенств: $g_j(x) = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,\ldots,p$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f(x); \quad f(x^*) = \max_{x\in X} f(x), \tag{3.16}$$

где $X = \left\{ x \left| \begin{array}{c} g_j(x) = 0,\ j = 1,\ldots,m;\ m < n \\ g_j(x) \le 0,\ j = m+1,\ldots,p \end{array} \right. \right\}.$

Утверждение 3.8 (необходимые условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть x^* *– точка локального минимума* (*максимума*) *в задаче* (3.16). *Тогда найдется такое число* $\lambda_0^* \ge 0$ *и вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*,\ldots,\lambda_p^*)^T$ *, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются условия*:

- *стационарности обобщенной функции Лагранжа по* x:

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n; \tag{3.17 а}$$

- *допустимости решения*:

$$g_j(x^*) = 0,\ j = 1,\ldots,m; \quad g_j(x^*) \le 0,\ j = m+1,\ldots,p; \tag{3.17 б}$$

- *неотрицательности для условного минимума*:

$$\lambda_j^* \geq 0\,, \quad j = m+1, \ldots, p \tag{3.17 в}$$

(*неположительности для условного максимума*: $\lambda_j^* \leq 0$, $j = m+1, \ldots, p$);

- *дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_j^*\ g_j(x^*) = 0\,, \quad j = m+1, \ldots, p\,. \tag{3.17 г}$$

Если при этом градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x^* линейно независимы (выполняется *условие регулярности*), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Следует подчеркнуть, что условия дополняющей нежесткости и знакоопределенности множителей Лагранжа записываются только для ограничений-неравенств.

Утверждение 3.9 (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*)*, удовлетворяющая системе* (3.17) *при* $\lambda_0^* \neq 0$*, суммарное число активных ограничений-неравенств в точке* x^* *и ограничений-равенств совпадает с числом* n *переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если* $\lambda_j^* > 0$ *для всех* $j \in J_a$*, то точка* x^* *– точка условного локального минимума в задаче* (3.16). *Если* $\lambda_j^* < 0$ *для всех* $j \in J_a$*, то* x^* *– точка условного локального максимума.*

Утверждение 3.10 (необходимые условия минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* *– регулярная точка минимума* (*максимума*) *в задаче* (3.16) *и имеется решение* (x^*, λ^*) *системы* (3.17). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* (x^*, λ^*)*, неотрицателен* (*неположителен*):

$$d^2L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad (d^2L(x^*, \lambda^*) \leq 0)$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0,\ j = 1, \ldots, m \ \text{ и } \ j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0\ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \leq 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0.$$

Утверждение 3.11 (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*)*, удовлетворяющая системе* (3.17) *при* $\lambda_0^* \neq 0$. *Если в этой точке* $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$ $(d^2L(x^*, \lambda^*) < 0)$ *для всех ненулевых* $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j(x^*) = 0,\ j = 1, \ldots, m \ \text{ и } \ j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0\ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \leq 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума (максимума) в задаче* (3.16).

Пример 3. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x)=x_1^2+x_2^2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x)=x_1-1=0,$$

$$g_2(x)=x_1+x_2-2\le 0.$$

☐ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L\left(x,\lambda_0,\lambda\right)=\lambda_0\,(x_1^2+x_2^2)+\lambda_1\,(x_1-1)+\lambda_2(x_1+x_2-2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1}=2\lambda_0 x_1+\lambda_1+\lambda_2=0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2}=2\lambda_0 x_2+\lambda_2=0$;

б) $x_1-1=0,\ x_1+x_2-2\le 0$;

в) $\lambda_2\ge 0$ (для минимума), $\lambda_2\le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2\ (x_1+x_2-2)=0$.

3. Решим систему для двух случаев.

Первый случай: $\lambda_0=0$, тогда $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=0$, что противоречит утверждению 3.8.

Второй случай: $\lambda_0\ne 0$. Поделив уравнения приведенной в п. 2 системы на λ_0 и заменив $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, условие «а» запишем в виде

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1+\lambda_2=0,$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2}=2x_2+\lambda_2=0.$$

Остальные соотношения сохранят свой вид.

Рассмотрим $2^{p-m}=2$ варианта удовлетворения условия «г» дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2=0$, тогда $x_2=0$. Из ограничения следует, что $x_1=1$, а из условия «а» $\lambda_1=-2$. Имеем условно-стационарную точку A : $x_1^*=1,\ x_2^*=0,\ \lambda_1^*=-2,\ \lambda_2^*=0$, в которой удовлетворяются необходимые условия и минимума, и максимума;

2) $\lambda_2\ne 0$, тогда $x_1+x_2-2=0,\ 2x_1+\lambda_1+\lambda_2=0,\ 2x_2+\lambda_2=0,\ x_1-1=0$. Получаем условно-стационарную точку B: $x_1^*=1,\ x_2^*=1,\ \lambda_1^*=0,\ \lambda_2^*=-2<0$, в которой удовлетворяются необходимые условия максимума.

4. Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

Исследуем точку A . Ограничение-неравенство не является активным. Поэтому $l = 1 < n = 2$ и достаточные условия первого порядка не выполняются. Проверим условия второго порядка: $d^2 L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. Так как ограничение $g_2(x) \le 0$ в точке A пассивно, то $dg_1(A) = dx_1 = 0$ и $d^2 L(A) = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \ne 0$. Следовательно, в точке A – условный локальный минимум.

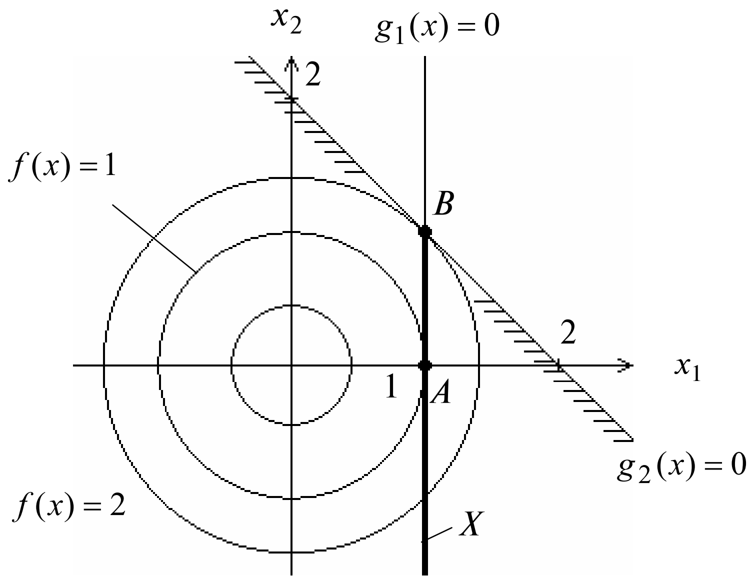

Рис. 4

Исследуем точку B. Ограничение $g_2(x) \le 0$ является активным, поэтому $l = 2 = n = 2$. Так как $\lambda_2^* = -2 < 0$, то в точке B выполняются достаточные условия максимума первого порядка и она является точкой локального максимума. Из методических соображений проверим достаточные условия второго порядка: $d^2 L(B) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. В точке B ограничение $g_2(x) = 0$ активно: $dg_1(B) = dx_1 = 0$, $dg_2(B) = dx_1 + dx_2 = 0$. Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2 L(B) = 0$. Поэтому требуется дополнительное исследование. На рис. 4 видно, что в точке B – условный локальный максимум, поскольку при приближении к этой точке вдоль множества X функция возрастает, а при движении от нее – убывает. Это подтверждает сделанный ранее вывод.

5. Значения функции в точках экстремума: $f(A) = 1$, $f(B) = 2$. ■