Лекция 17(3).

3. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

3.1. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ С КОНЕЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ допустимых вектор-функций $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$, где t_0, T заданы, т.е. $x_i(t) \in C^1([t_0, T])$, $i = 1,\ldots,n$;

б) функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad x_i(T) = x_{iT}, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где x_{i0}, x_{iT}, $i = 1,\ldots,n$, заданы, т.е. каждая из кривых $x_i(t)$ проходит через две закрепленные граничные точки;

в) функции $x_i(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяют ***конечным связям***:

$$\varphi_j(t, x_1(t),\ldots,x_n(t)) = 0, \quad j = 1,\ldots,m, \quad m < n, \tag{2}$$

где функции $\varphi_j(t, x_1,\ldots,x_n)$, $j = 1,\ldots,m$, непрерывно дифференцируемы по всем переменным.

Предполагается, что уравнения (2) независимы, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = m,$$

а также связи (2) согласованы с граничными условиями (1).

Последнее означает, что граничные точки должны удовлетворять уравнениям (2) при $t = t_0$ и $t = T$.

На множестве $\mathcal{M}$ задан функционал

$$I[x_1(t),\ldots,x_n(t)] = \int_{t_0}^{T} F(t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t))\,dt, \tag{3}$$

где функция $F(t, x_1, ..., x_n, x_1', ..., x_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор-функций $x(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$, требуется найти вектор-функцию $x^*(t) = (x_1^*(t), ..., x_n^*(t))^T$, на которой функционал (3) достигает экстремума, т.е.

$$I[x_1^*(t), ..., x_n^*(t)] = \underset{x(t) \in \mathcal{M}}{\operatorname{extr}} \int_{t_0}^{T} F(t, x_1(t), ..., x_n(t), x_1'(t), ..., x_n'(t))\, dt. \qquad (*)$$

Поставленная задача относится к задачам поиска ***условного экстремума функционалов***, так как кроме граничных условий на искомые функции наложены дополнительные условия, в данном случае конечные. В третьей главе рассматриваются еще задачи с интегральными и дифференциальными условиями (связями).

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Теорема 1 (необходимые условия экстремума в задаче (*)).

Если на вектор-функциии $x^*(t) = (x_1^*(t), ..., x_n^*(t))^T$, *где* $x_i^*(t) \in C^1([t_0, T])$, *удовлетворяющей граничным условиям* (1) *и конечным связям* (2), *функционал* (3) *достигает экстремума, то функции* $x_1^*(t), ..., x_n^*(t)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$F_{x_i}^* - \frac{d}{dt} F_{x_i'}^* = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

составленной для функционала

$$I^*[x_1(t), ..., x_n(t)] = \int_{t_0}^{T} F^*(t, x_1(t), ..., x_n(t), x_1'(t), ..., x_n'(t))\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left[F(t, x_1(t), ..., x_n(t), x_1'(t), ..., x_n'(t)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \cdot \varphi_j(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \right] dt.$$

Здесь $F^*(t, x, x') = F(t, x, x') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \cdot \varphi_j(t, x)$ называется ***функцией Лагранжа***,

а функции $\lambda_j(t),\ j = 1, ..., m$, – ***множителями Лагранжа***.

В общем случае используется обобщенная функция Лагранжа

$$F^*(t, x, x') = \lambda_0(t) \cdot F(t, x, x') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \cdot \varphi_j(t, x).$$

При этом рассматриваются два случая: $\lambda_0(t) \equiv 0$ и $\lambda_0(t) \not\equiv 0$. Такая методика аналогична применяемой при условной минимизации функций.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ (*)

1. Составить функцию Лагранжа

$$F^*(t,x,x') = F(t,x,x') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \cdot \varphi_j(t,x),$$

где функции $\lambda_j(t)$, $j = 1,\dots,m$, – множители Лагранжа.

2. Записать систему уравнений Эйлера и условия связи:

$$F^*_{x_i} - \frac{d}{dt} F^*_{x'_i} = 0, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$\varphi_j(t, x_1(t),\dots,x_n(t)) = 0, \quad j = 1,\dots,m.$$

3. Найти общее решение системы

$$x_i(t) = x_i(t, C_1,\dots,C_{2n}), \quad i = 1,\dots,n,$$

и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1(t),\dots,\lambda_m(t)$.

4. Определить постоянные $C_1,\dots,C_{2n}$ из граничных условий:

$$x_i(t_0, C_1,\dots,C_{2n}) = x_{i0}, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$x_i(T, C_1,\dots,C_{2n}) = x_{iT}, \quad i = 1,\dots,n,$$

и выписать выражение для экстремали $x^*(t) = (x_1{}^*(t),\dots,x_n{}^*(t))^T$.

Пример. Найти экстремаль функционала

$$I[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, x_1{}^2(t) + x_2{}^2(t) - x_1'^2(t) - x_2'^2(t)\,]\, dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0) = 1, \;\; x_2(0) = -1, \;\; x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \;\; x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

и уравнению связи $x_1 - x_2 - 2\cos t = 0$.

□ 1. Составим функцию Лагранжа. Так как

$$F = x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_1'^2 - x_2'^2, \quad \varphi_1(t,x) = x_1 - x_2 - 2\cos t, \quad m = 1,$$

то

$$F^* = F + \lambda_1(t)\cdot\varphi_1(t,x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_1'}^2 - {x_2'}^2 + \lambda_1(t)\cdot[x_1 - x_2 - 2\cos t].$$

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$F^*_{x_1} = 2x_1 + \lambda_1(t), \quad F^*_{x_1'} = -2x_1', \quad \frac{d}{dt}F^*_{x_1'} = -2x_1'',$$

$$F^*_{x_2} = 2x_2 - \lambda_1(t), \quad F^*_{x_2'} = -2x_2', \quad \frac{d}{dt}F^*_{x_2'} = -2x_2'',$$

то справедливы следующие соотношения:

$$F^*_{x_1} - \frac{d}{dt}F^*_{x_1'} = 2x_1 + \lambda_1(t) + 2x_1'' = 0,$$

$$F^*_{x_2} - \frac{d}{dt}F^*_{x_2'} = 2x_2 - \lambda_1(t) + 2x_2'' = 0,$$

$$x_1 - x_2 - 2\cos t = 0.$$

3. Найдем общее решение системы.

Складывая первые два уравнения системы, получаем

$$2(x_1'' + x_2'') + 2(x_1 + x_2) = 0$$

или, вводя обозначение $x_1 + x_2 = y$, имеем

$$y'' + y = 0.$$

Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, то

$$y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t = x_1 + x_2.$$

С другой стороны, из третьего уравнения системы следует $2\cos t = x_1 - x_2$. Складывая два последних уравнения, получаем $2x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t + 2\cos t$ или $x_1(t) = \frac{C_1}{2}\cos t + \frac{C_2}{2}\sin t + \cos t$.

Тогда

$$x_2(t) = x_1(t) - 2\cos t,$$

$$\lambda_1(t) = 2x_2(t) + 2x_2''(t).$$

4. Определим произвольные постоянные из граничных условий:

$$x_1(0) = \frac{C_1}{2} + 1 = 1,$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{C_2}{2} = 1.$$

Отсюда $C_1 = 0,\ C_2 = 2$ и $x_1^*(t) = \sin t + \cos t$, $x_2^*(t) = x_1^*(t) - 2\cos t = \sin t - \cos t$, $\lambda_1(t) = 2\sin t - 2\cos t - 2\sin t + 2\cos t = 0$.

Заметим, что граничные условия и уравнения связи в задаче, очевидно, согласованы, так как $x_1(0) - x_2(0) - 2\cos 0 = 0,\ x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Этот факт следует проверять перед решением задачи.

Таким образом, в задаче найдена экстремаль $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))^T$:

$$x_1^*(t) = \sin t + \cos t, \quad x_2^*(t) = \sin t - \cos t. \blacksquare$$

3.2. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ допустимых вектор-функций $x(t) = = (x_1(t),...,x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$, где t_0, T заданы, т.е. $x_i(t) \in C^1([t_0, T]),\ i = 1,..., n$;

б) функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad x_i(T) = x_{iT},\ i = 1,..., n\ , \tag{1}$$

где $x_{i0}, x_{iT}, i = 1,..., n$, заданы, т.е. каждая из кривых проходит через две закрепленные граничные точки;

в) функции $x_i(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяют ***дифференциальным связям***

$$\varphi_j(t, x_1(t),..., x_n(t), x_1'(t),..., x_n'(t)) = 0, \quad j = 1,..., m, \quad m < n, \tag{2}$$

где функции $\varphi_j(t, x_1,..., x_n, x_1',..., x_n'),\ j = 1,..., m$, непрерывно дифференцируемы по всем переменным.

Предполагается, что уравнения (2) независимы, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1'} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1'} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n'} \end{pmatrix} = m.$$

На множестве $\mathcal{M}$ задан функционал

$$I[x_1(t),...,x_n(t)] = \int_{t_0}^{T} F(t,x_1(t),...,x_n(t),x_1'(t),...,x_n'(t))\,dt, \qquad (3)$$

где функция $F(t,x_1,...,x_n,x_1',...,x_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор-функций $x(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$, требуется найти вектор-функцию $x^*(t) = (x_1{}^*(t),..., x_n{}^*(t))^T$, на которой функционал (3) достигает экстремума, т.е.

$$I[x_1{}^*(t),...,x_n{}^*(t)] = \operatorname*{extr}_{x(t)\in\mathcal{M}} \int_{t_0}^{T} F(t,x_1(t),...,x_n(t),x_1'(t),...,x_n'(t))\,dt, \qquad (**)$$

Поставленная задача называется ***задачей Лагранжа***.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Теорема 2 (необходимые условия экстремума в задаче (**)).

Если на вектор-функции $x^*(t) = (x_1{}^*(t),..., x_n{}^*(t))^T$, где $x_i{}^*(t) \in C^1([t_0, T])$, удовлетворяющей граничным условиям (1) *и дифференциальным связям* (2), *функционал* (3) *достигает экстремума, то функции $x_1{}^*(t),..., x_n{}^*(t)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$F^*_{x_i} - \frac{d}{dt} F^*_{x_i'} = 0, \quad i = 1,..., n,$$

составленной для функционала

$$I^*[x_1(t),..., x_n(t)] = \int_{t_0}^{T} F^*(t,x_1(t),...,x_n(t),x_1'(t),...,x_n'(t))\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} [\, F(t,x_1(t),...,x_n(t),x_1'(t),...,x_n'(t)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\cdot\varphi_j(t,x_1(t),...,x_n(t),x_1'(t),...,x_n'(t))\,]\,dt.$$

Здесь $F^*(t, x, x') = F(t, x, x') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\cdot\varphi_j(t, x, x')$ называется ***функцией Лагранжа***, а $\lambda_j(t),\ j = 1,..., m,$ – ***множителями Лагранжа***.

В общем случае применяется обобщенная функция Лагранжа.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ (**)

1. Составить функцию Лагранжа

$$F^*(t,x,x') = F(t,x,x') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\cdot\varphi_j(t,x,x'),$$

где $\lambda_j(t),\ j=1,\dots,m$, – множители Лагранжа.

2. Записать систему уравнений Эйлера и уравнения связи:

$$F^*_{x_i} - \frac{d}{dt}F^*_{x'_i} = 0, \quad i=1,\dots,n,$$

$$\varphi_j(t,x_1(t),\dots,x_n(t),x'_1(t),\dots,x'_n(t)) = 0, \quad j=1,\dots,m.$$

3. Найти общее решение системы $x_i = x_i(t,C_1,\dots,C_{2n}),\ i=1,\dots,n$ и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1(t),\dots,\lambda_m(t)$.

4. Определить постоянные $C_1,\dots,C_{2n}$ из граничных условий:

$$x_i(t_0,C_1,\dots,C_{2n}) = x_{i0}, \quad i=1,\dots,n,$$

$$x_i(T,C_1,\dots,C_{2n}) = x_{iT}, \quad i=1,\dots,n,$$

и выписать выражение для экстремали $x^*(t) = (x_1{}^*(t),\dots,x_n{}^*(t))^T$.

Пример. Найти экстремаль функционала

$$I[x_1(t),x_2(t)] = \int_0^1 [\,x_1'^2(t) + x_2'^2(t)\,]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0)=2, \quad x_2(0)=0, \quad x_1(1)=2\,\mathrm{ch}1, \quad x_2(1)=2\,\mathrm{sh}1$$

и дифференциальной связи $x'_1 - x_2 = 0$.

□ 1. Составим функцию Лагранжа. Так как

$$F(t,x,x') = x_1'^2 + x_2'^2, \quad \varphi_1(t,x,x') = x'_1 - x_2, \quad m=1,$$

то

$$F^*(t,x,x') = x_1'^2 + x_2'^2 + \lambda_1(t)\cdot[x'_1 - x_2].$$

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$F^*_{x_1} = 0, \quad F^*_{x'_1} = 2x'_1 + \lambda_1(t), \quad \frac{d}{dt}F^*_{x'_1} = 2x''_1 + \lambda'_1(t),$$

$$F^*_{x_2} = -\lambda_1(t), \quad F^*_{x'_2} = 2x'_2, \quad \frac{d}{dt}F^*_{x'_2} = 2x''_2,$$

то

$$F^*_{x_1} - \frac{d}{dt} F^*_{x_1'} = -2x_1'' - \lambda_1'(t) = 0 ,$$

$$F^*_{x_2} - \frac{d}{dt} F^*_{x_2'} = -\lambda_1(t) - 2x_2'' = 0 ,$$

$$x_1' - x_2 = 0 .$$

3. Найдем общее решение системы. Из первых двух уравнений получаем

$$\lambda_1(t) = -2x_2'', \quad \lambda_1'(t) = -2x_2''', \quad 2x_1'' = -\lambda_1'(t) = 2x_2''' .$$

Из третьего уравнения $x_1' = x_2$, $x_1'' = x_2'$. Тогда $2x_1'' = 2x_2' = 2x_2'''$, или $x_2''' - x_2' = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 0$. Поэтому

$$x_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 ,$$

$$x_1(t) = \int x_2(t)\,dt = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3 t + C_4 ,$$

$$\lambda_1(t) = -2x_2''(t) .$$

4. Определим постоянные $C_1, \ldots, C_4$ из граничных условий:

$$x_1(0) = C_1 - C_2 + C_4 = 2 ,$$

$$x_2(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0 ,$$

$$x_1(1) = C_1 e - C_2 e^{-1} + C_3 + C_4 = 2\,\mathrm{ch}1 = 2 \cdot \frac{e + e^{-1}}{2} ,$$

$$x_2(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} + C_3 = 2\,\mathrm{sh}1 = 2 \cdot \frac{e - e^{-1}}{2} .$$

Отсюда $C_1 = 1,\ C_2 = -1,\ C_3 = C_4 = 0$.

В результате получаем экстремаль $x^*(t) = (x_1{}^*(t), x_2{}^*(t))^T$:

$$x_1{}^*(t) = e^t + e^{-t} , \quad x_2{}^*(t) = e^t - e^{-t} .$$

При этом $\lambda_1(t) = -2x_2''(t) = -2e^t + 2e^{-t}$.■

3.3. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ допустимых вектор-функций $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0,T]$, где t_0,T заданы, т.е. $x_i(t)\in C^1([t_0,T])$, $i=1,\ldots,n$;

б) функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$x_i(t_0)=x_{i0},\ x_i(T)=x_{iT},\quad i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где x_{i0}, x_{iT}, $i=1,\ldots,n$, заданы, т.е. каждая из кривых $x_i(t)$ проходит через две закрепленные граничные точки;

в) функции $x_i(t)$ удовлетворяют ***интегральным связям***

$$\int_{t_0}^{T} F_j(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t))\,dt = L_j,\quad j=1,\ldots,m, \tag{2}$$

где функции $F_j(t,x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным, L_j – заданные числа. Количество интегральных связей m может быть меньше, равно или больше n. Функции $x(t)$ не являются экстремалями интегралов в (2).

На множестве $\mathcal{M}$ задан функционал

$$I[x_1(t),\ldots,x_n(t)] = \int_{t_0}^{T} F(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t))\,dt, \tag{3}$$

где функция $F(t,x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор-функций $x(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$, требуется найти вектор-функцию $x^*(t)=(x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t))^T$, на которой функционал (3) достигает экстремума, т.е.

$$I[x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t)] = \operatorname*{extr}_{x(t)\in\mathcal{M}} \int_{t_0}^{T} F(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t))\,dt. \tag{***}$$

Теорема 3 (необходимые условия экстремума в задаче (***)).

Если на вектор-функции $x^*(t) = (x_1^*(t),\dots,x_n^*(t))^T$, *где* $x_i^*(t) \in C^1([t_0, T])$, *удовлетворяющей граничным условиям* (1) *и интегральным связям* (2), *функционал* (3) *достигает экстремума, то функции* $x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$F^*_{x_i} - \frac{d}{dt} F^*_{x_i'} = 0, \quad i = 1,\dots,n,$$

составленной для функционала

$$I^*[x_1(t),\dots,x_n(t)] = \int_{t_0}^{T} F^*(t, x_1(t),\dots,x_n(t), x_1'(t),\dots,x_n'(t))\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} [\, F(t, x_1(t),\dots,x_n(t), x_1'(t),\dots,x_n'(t)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot F_j(t, x_1(t),\dots,x_n(t), x_1'(t),\dots,x_n'(t)) \,]\,dt .$$

З а м е ч а н и я.

1. Интегральные связи (2) не накладывают столь жестких ограничений, как дифференциальные или конечные связи. Например, из условий типа (2), вообще говоря, нельзя выразить некоторые из функций $x_1(t),\dots,x_n(t)$ через остальные. Поэтому число интегральных связей не обязательно должно быть меньше n.

2. ***Изопериметрическими задачами*** в узком смысле называются задачи об отыскании геометрической фигуры максимальной площади при заданном периметре. В настоящее время к изопериметрическим относят значительно более общий класс задач (3).

3. В общем случае применяется обобщенная функция Лагранжа.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ (***)

1. Составить функцию Лагранжа

$$F^*(t, x, x') = F(t, x, x') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot F_j(t, x, x'),$$

где λ_j, $j = 1,\dots,m$, – множители Лагранжа (постоянные).

2. Записать систему уравнений Эйлера и уравнения связи (3.31):

$$F^*_{x_i} - \frac{d}{dt} F^*_{x_i'} = 0, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$\int_{t_0}^{T} F_j(t, x_1(t),\dots,x_n(t), x_1'(t),\dots,x_n'(t))\,dt = L_j, \qquad j = 1,\dots,m .$$

3. Найти общее решение системы $x_i = x_i(t, C_1, \ldots, C_{2n})$, $i = 1, \ldots, n$, и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

4. Определить постоянные $C_1, \ldots, C_{2n}$ из граничных условий:

$$x_i(t_0, C_1, \ldots, C_{2n}) = x_{i0}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x_i(T, C_1, \ldots, C_{2n}) = x_{iT}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Выписать выражение для экстремали $x^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))^T$.

Пример. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^1 x'^2(t)\, dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x(1) = 6$ и интегральной связи

$$\int_0^1 x(t)\, dt = 3.$$

□ 1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F(t, x, x') = x'^2$, количество интегральных связей $m = 1$, $F_1(t, x, x') = x$, то

$$F^*(t, x, x') = x'^2 + \lambda \cdot x,$$

где индекс «1» у множителя λ_1 для упрощения записи здесь и далее в задачах с одной интегральной связью опущен.

2. Запишем уравнение Эйлера и уравнение связи. Поскольку $F_x^* = \lambda$, $F_{x'}^* = 2x'$, $\frac{d}{dt} F_{x'}^* = 2x''$, то

$$F_x^* - \frac{d}{dt} F_{x'}^* = \lambda - 2x'' = 0, \qquad \int_0^1 x(t)\, dt = 3.$$

3. Найдем общее решение уравнения и выражение для λ. Имеем

$$x''(t) = \frac{\lambda}{2}, \quad x'(t) = \frac{\lambda}{2} t + C_1, \quad x(t) = \frac{\lambda t^2}{4} + C_1 t + C_2,$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\lambda t^2}{4} + C_1 t + C_2 \right] dt = \frac{\lambda t^3}{12} + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t \Bigg|_0^1 = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3.$$

4. Определим C_1, C_2, λ из граничных условий и уравнения связи:

$$x(0) = C_2 = 1,$$

$$x(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6,$$

$$\frac{\lambda}{12}+\frac{C_1}{2}+C_2=3.$$

Отсюда

$$C_2=1, \qquad \frac{\lambda}{4}=6-C_1-C_2=5-C_1,$$

$$\frac{\lambda}{12}=\frac{5-C_1}{3}, \quad \frac{5-C_1}{3}+\frac{C_1}{2}+1=3, \quad C_1=2, \quad \lambda=12.$$

В результате получаем экстремаль $x^*(t)=3t^2+2t+1$. ■