Лекция 16(2).

2.2. МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

2.2.1. Функционалы $\int\limits_{t_0}^{T} F(t,x(t),x'(t))dt$, зависящие от одной функции.

Случай гладких экстремалей

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям (см. рис.1):

а) функции $x(t)$ непрерывно дифференцируемые, т.е. $x(t) \in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются значения t_0 и T, которые заранее не заданы;

б) значения $t_0, x_0 = x(t_0)$ и T , $x_T = x(T)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям:

$$\psi(t_0, x_0) = 0, \qquad \varphi(T, x_T) = 0, \tag{1}$$

где $\psi(t,x)$, $\varphi(t,x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве $\mathcal{M}$ задан функционал

$$I[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))\, dt, \tag{2}$$

где функция $F(t,x,x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал (2) достигает экстремума , т.е.

$$I\left[x^*(t)\right] = \operatorname*{extr}_{x(t)\in\mathcal{M}} \int\limits_{t_0}^{T} F(t,x(t),x'(t))\, dt . \tag{*}$$

З а м е ч а н и я.

1. Условия (1) определяют подвижные границы (рис. 1). Таким образом, экстремум в поставленной задаче ищется в классе гладких кривых, концы которых скользят по двум заданным линиям, описываемым уравнениями $\psi(t_0, x_0) = 0$ (для левого конца), $\varphi(T, x_T) = 0$ (для правого конца).

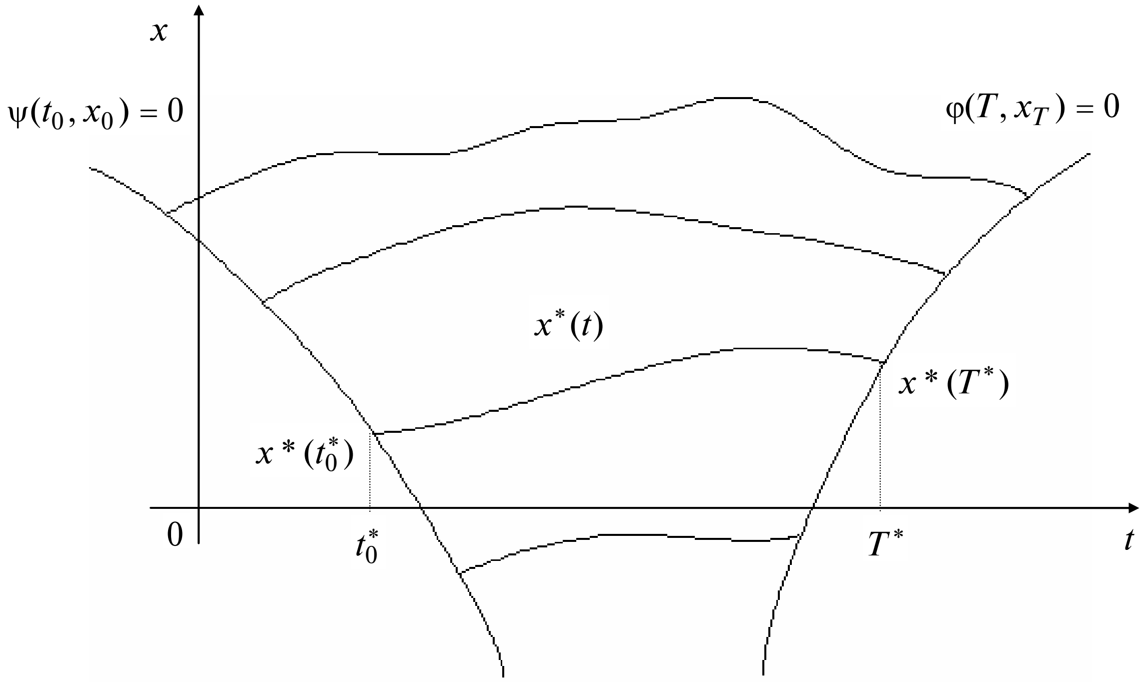

Рис. 1

Можно выделить следующие частные случаи общей постановки задачи.

А. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым, описываемым уравнениями: $t = t_0$, $t = T$ (рис. 2).

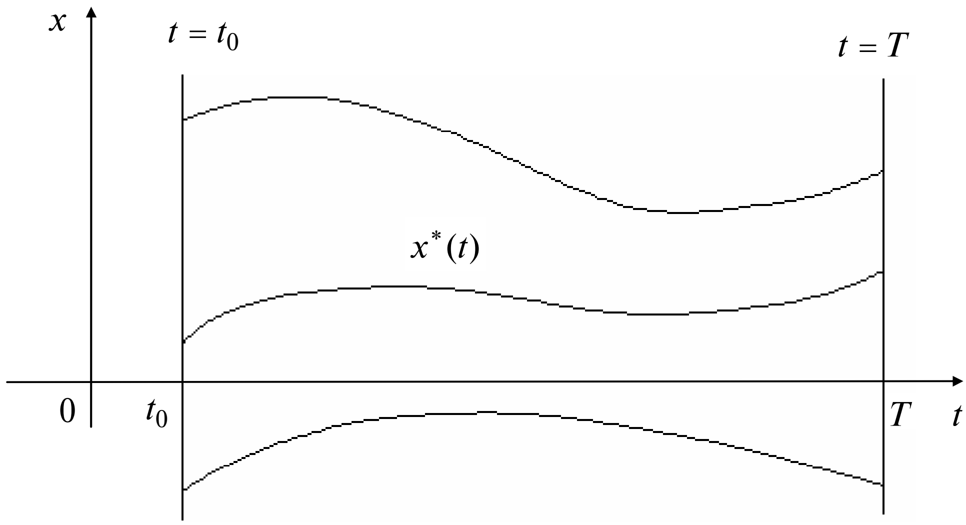

Рис. 2

Б. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым, описываемым уравнениями

$$x = \psi(t)\,, \quad x = \varphi(t)\,.$$

Рисунок аналогичен рис. 1.

В рамках рассматриваемого частного случая выделим задачу, в которой заданные кривые являются прямыми линиями, параллельными оси абсцисс: $x = x_0$, $x = x_T$ (рис. 3).

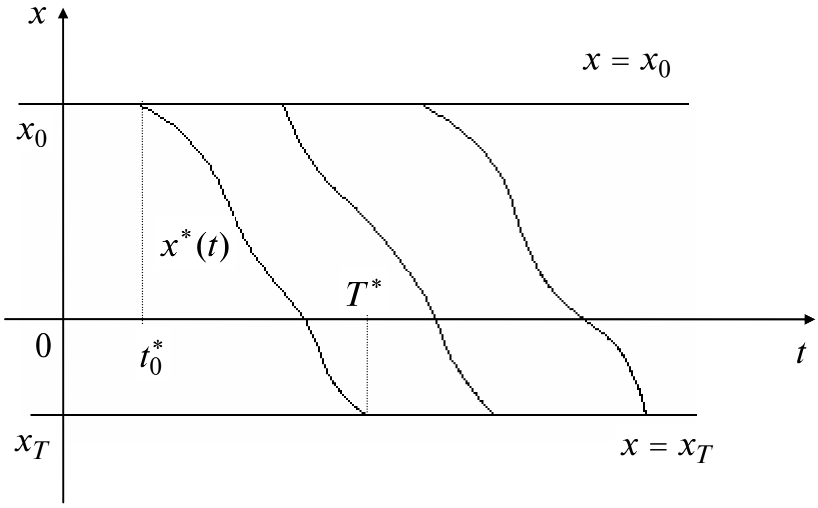

Рис. 3

2. В поставленной задаче наряду с поиском кривой $x^*(t)$ фактически производится выбор значений $t_0{}^*$ и T^* (см. рис. 2 и рис. 3), т.е. ищется тройка ($x^*(t), t_0{}^*, T^*$). При этом ее ε-окрестность первого порядка ($\varepsilon > 0$) образуется тройками ($x(t), t_0, T$), удовлетворяющими условию

$$\left\| x(t) - x^*(t) \right\|_{C^1(\Delta)} < \varepsilon, \quad \left| t_0 - t_0{}^* \right| < \varepsilon, \quad \left| T - T^* \right| < \varepsilon\,.$$

Функционал (2) точнее записывается в форме

$$I\left[x(t), t_0, T\right] = \int\limits_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))\, dt\,.$$

Функционал достигает на тройке ($x^*(t), t_0{}^*, T^*$) слабого минимума, если $I\left[x(t), t_0, T\right] \geq I\left[x^*(t), t_0{}^*, T^*\right]$ в ε-окрестности первого порядка.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Теорема 6 (необходимые условия экстремума функционала в задаче (*)).

Если на функции $x^*(t) \in C^1(\Delta)$, *удовлетворяющей граничным условиям* $\psi(t_0, x_0) = 0$, $\varphi(T, x_T) = 0$, *функционал* (2) *достигает слабого экстремума, то она удовлетворяет*:

а) *уравнению Эйлера* $F_x - \dfrac{d}{dt} F_{x'} = 0$;

б) *условиям трансверсальности*:

$$\delta\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t_0^*, x^*(t_0^*)} \delta t_0 + \frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{t_0^*, x^*(t_0^*)} \delta x_0 = 0,$$

$$\delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{T^*, x^*(T^*)} \delta T + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{T^*, x^*(T^*)} \delta x_T = 0,$$

$$F_{x'}\Big|_{t=T^*} \cdot \delta x_T + [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=T^*} \cdot \delta T = 0,$$

$$F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} \cdot \delta x_0 + [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=t_0^*} \cdot \delta t_0 = 0.$$

З а м е ч а н и я.

1. Если один из концов допустимых кривых закреплен, то условия трансверсальности для этого конца не выписываются.

2. Если рассматривается задача, в которой концы кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым $t = t_0$, $t = T$ (см. рис.2), поскольку t_0 и T заданы, то вариации $\delta t_0 = 0$, $\delta T = 0$. Следовательно, условия трансверсальности имеют вид

$$F_{x'}\Big|_{t=T^*} = 0, \qquad F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} = 0.$$

3. Если концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым $x = \psi(t)$ и $x = \varphi(t)$, то условия трансверсальности можно записать в виде

$$[F + (\varphi' - x')F_{x'}]\Big|_{t=T^*} = 0,$$

$$[F + (\psi' - x')F_{x'}]\Big|_{t=t_0^*} = 0.$$

Если рассматривается случай задания кривых в виде

$$x = x_0 = \psi(t) = \text{const}, \qquad x = x_T = \varphi(t) = \text{const},$$

то $\varphi'(t) \equiv 0$, $\psi'(t) \equiv 0$, а условия упрощаются:

$$[F - x' F_{x'}]\Big|_{t=T^*} = 0, \qquad [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=t_0^*} = 0.$$

4. Если условия $\psi(t_0, x_0) = 0$, $\varphi(T, x_T) = 0$, отсутствуют, то вариации δx_T, δT, δx_0, δt_0 произвольны. Тогда

$$F_{x'}\Big|_{t=T^*} = 0, \quad [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=T^*} = 0,$$

$$F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} = 0, \quad [F - x' F_{x'}]\Big|_{t=t_0^*} = 0.$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (*)

1. Записать уравнение Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0.$$

2. Найти общее решение уравнения Эйлера: $x = x(t, C_1, C_2)$.

3. Записать условия трансверсальности и граничные условия $\psi(t_0, x_0) = 0$, $\varphi(T, x_T) = 0$. В частных случаях граничных условий выбрать требуемое условие трансверсальности.

4. Определить C_1, C_2, t_0^*, T^* и получить уравнение экстремали $x^*(t)$.

2.2.2. Функционалы $\int\limits_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))dt$, зависящие от одной функции. Случай негладких экстремалей

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям (рис. 4) :

а) функции $x(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[t_0, T]$, где t_0 и T заданы;

б) функции $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T,$$

где x_0, x_T заданы, т.е. проходят через две закрепленные граничные точки A и B ;

в) функции $x(t)$ являются кусочно-гладкими, причем непрерывность производной может нарушаться в некоторой заранее неизвестной точке t_1 (***точке излома***). Функции $x(t)$ образуются двумя гладкими функциями $x_{AC}(t)$ и $x_{CB}(t)$, имеющими общую точку C, т.е. $x_{AC}(t) \in C^1([t_0, t_1))$ и $x_{CB}(t) \in C^1((t_1, T])$.

На множестве $\mathcal{M}$ задан функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))\, dt\,,$$

где функция $F(t, x, x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

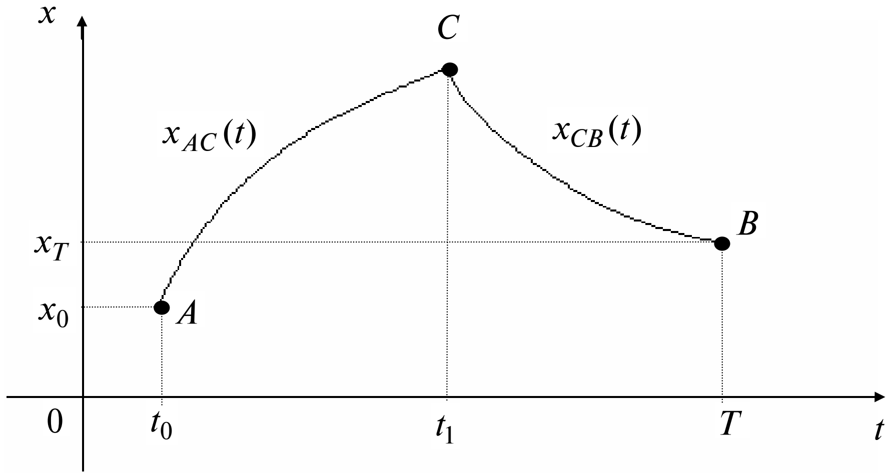

Рис. 4

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству $\mathscr{M}$, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал достигает экстремума , т.е.

$$I\left[x^*(t)\right] = \underset{x(t)\in\mathscr{M}}{\operatorname{extr}} \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))\, dt\,. \qquad (*)$$

З а м е ч а н и я.

1. Могут рассматриваться задачи, в которых несколько точек излома.

2. Доказано, что в задаче поиска экстремума функционала излом возможен в точке, где $F_{x'x'} = 0$.

3. Во многих практических задачах требование непрерывности производной является неестественным, так как решение достигается на экстремалях, имеющих точки излома. Поэтому рассматриваемая здесь задача актуальна.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Теорема 7 (необходимые условия экстремума в задаче (*)).

Если на непрерывной функции $x^*(t)$, *непрерывно дифференцируемой на промежутках* $[t_0, t_1)$ *и* $(t_1, T]$, *где* t_1 – *точка излома производной, и удовлетворяющей граничным условиям* $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(T) = x_T$, *функционал достигает экстремума, то она удовлетворяет*:

а) *уравнению Эйлера на каждом из промежутков* $[t_0, t_1)$ *и* $(t_1, T]$;

б) *условиям Вейерштрасса–Эрдмана*

$$F_{x'}\big|_{t=t_1-0} = F_{x'}\big|_{t=t_1+0},$$

$$[\,F - x' F_{x'}\,]\big|_{t=t_1-0} = [\,F - x' F_{x'}\,]\big|_{t=t_1+0}.$$

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ (*)

1. Выписать условия Вейерштрасса–Эрдмана. Если из них следует условие непрерывности первой производной $x'(t_1 - 0) = x'(t_1 + 0)$, воспользоваться алгоритмом нахождения гладких экстремалей.

2. Записать уравнение Эйлера и найти его общее решение на промежутках $[t_0, t_1)$ и $(t_1, T]$: $x_{AC}(t) = x_{AC}(t, C_1, C_2)$, $\quad x_{CB}(t) = x_{CB}(t, C_3, C_4)$.

3. Определить C_1, C_2, C_3, C_4, t_1 из граничных условий $x(t_0) = x_0, x(T) = x_T$, условия непрерывности $x_{AC}(t_1) = x_{CB}(t_1)$ и условий Вейерштрасса–Эрдмана. В результате получить экстремаль $x^*(t)$.

Пример. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^4 x'^{\,2}(t) \cdot [x'(t) - 2]^2 \, dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(4) = 4$.

□ 1. Запишем условия Вейерштрасса–Эрдмана:

$$F_{x'}\big|_{t=t_1-0} = 2x'(x'-2)(2x'-2)\Big|_{t=t_1-0} = 2x'(x'-2)(2x'-2)\Big|_{t=t_1+0} = F_{x'}\big|_{t=t_1+0},$$

$$F - x'F_{x'}\big|_{t=t_1-0} = x'^{\,2}(x'-2)(2-3x')\Big|_{t=t_1-0} = x'^{\,2}(x'-2)(2-3x')\Big|_{t=t_1+0} = F - x'F_{x'}\big|_{t=t_1+0}.$$

Отсюда следуют варианты одновременного выполнения записанных условий:

а) $x'(t_1 - 0) = x'(t_1 + 0)$;

б) $x'(t_1 - 0) = 0$, $x'(t_1 + 0) = 2$;

в) $x'(t_1 - 0) = 2$, $x'(t_1 + 0) = 0$.

Вариант «а» соответствует случаю поиска гладких экстремалей. Так как подынтегральная функция не зависит от x и t явно, то общее решение уравнения Эйлера имеет вид $x(t) = C_1 t + C_2$. Из граничных условий $x(0) = C_2 = 0$, $x(4) = 4C_1 + C_2 = 4$ находим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ и экстремаль $x^*(t) = t$.

2. Решение уравнения Эйлера на промежутках $[0, t_1)$ и $(t_1,\ 4]$ имеет вид

$$x_{AC}(t) = C_1 t + C_2, \quad x_{CB}(t) = C_3 t + C_4.$$

3. Определим C_1, C_2, C_3, C_4, t_1 из граничных условий:

$$x_{AC}(0) = C_2 = 0, \quad x_{CB}(4) = 4C_3 + C_4 = 4,$$

из условия непрерывности:

$$x_{AC}(t_1) = C_1 \cdot t_1 + C_2 = C_3 \cdot t_1 + C_4 = x_{CB}(t_1),$$

и из условий Вейерштрасса–Эрдмана (см.п.1).

Варианту «б» соответствуют условия:

$$x'(t_1 - 0) = x'_{AC}(t_1 - 0) = C_1 = 0, \qquad x'(t_1 + 0) = x'_{CB}(t_1 + 0) = C_3 = 2.$$

Тогда получаем $C_4 = 4 - 4C_3 = -4$, $C_3 t_1 + C_4 = 0$, $t_1 = 2$. В результате получена экстремаль $x^*_{AC}(t) \equiv 0$ при $t \in [0; 2]$, $x^*_{CB}(t) = 2t - 4$ при $t \in [2; 4]$.

Варианту «в» соответствуют условия:

$$x'(t_1 - 0) = x'_{AC}(t_1 - 0) = C_1 = 2, \quad x'(t_1 + 0) = x'_{CB}(t_1 + 0) = C_3 = 0.$$

Тогда получаем $C_4 = 4 - 4C_3 = 4$, $2t_1 = C_4$, $t_1 = 2$. В результате получена экстремаль $x^*_{AC}(t) = 2t$ при $t \in [0; 2]$, $x^*_{CB}(t) = 4$ при $t \in [2; 4]$ (см. рис. 5).

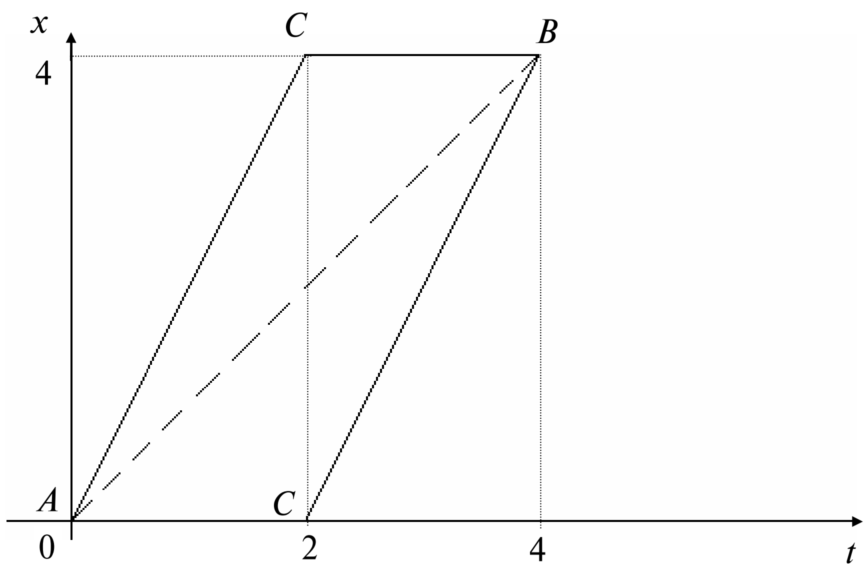

Рис. 5

Таким образом, в поставленной задаче имеются три экстремали: одна гладкая и две – негладкие. На негладких экстремалях $I\left[x^*(t)\right] = 0$, а на гладкой $I = 4$ (очевидно, на ней минимум не достигается).■

2.2.3. Функционалы $\int\limits_{t_0}^{T} F(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t))dt + G(T, x_1(T), \ldots, x_n(T))$, зависящие от нескольких функций

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ допустимых вектор-функций $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$, непрерывно дифференцируемы, т.е. $x_i(t) \in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, значение $t_0 \in \Delta$ задано, а значение T не задано и является внутренней точкой Δ;

б) левый конец кривых закреплен, т.е. $x(t_0) = x_0 = (x_{10},\ldots,x_{n0})^T$, где x_{i0}, $i = 1,\ldots,n$, заданы; правый конец удовлетворяет граничным условиям:

$$\varphi_j(T, x_{1T},\ldots,x_{nT}) = 0\,,\ j = 1,\ldots,p\,, \quad p \le n+1\,,$$

где $x_{iT} = x_i(T)$; $\varphi_j(t, x_1,\ldots,x_n)$, $j = 1,\ldots,p$, – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве $\mathcal{M}$ задан функционал

$$I[x_1(t),\ldots,x_n(t)] = \int\limits_{t_0}^{T} F(t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t))dt + G(T, x_1(T),\ldots,x_n(T)),$$

где функция $F(t, x_1,\ldots,x_n, x_1',\ldots,x_n')$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно по всем переменным, а функция $G(t, x_1,\ldots,x_n)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным.

Среди всех вектор-функций, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$, требуется найти вектор-функцию $x^*(t) = (x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t))^T$, на которой достигается экстремум функционала, т.е.

$$I[x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t)] = \operatorname*{extr}_{x(t)\in\mathcal{M}} \left\{ \int\limits_{t_0}^{T} F(t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t))dt + G(T, x_1(T),\ldots,x_n(T)) \right\}. \qquad (*)$$

Замечания.

1. Функционал называется ***функционалом Больца***. Кроме ***интегрального члена***, он содержит ***терминальный член*** $G(T, x_1(T),\ldots,x_n(T))$.

2. В рассматриваемой задаче для простоты изложения полагается, что левый конец допустимых кривых закреплен. В качестве обобщений могут быть изучены вариационные задачи с подвижным левым концом, удовлетворяющим условию $\psi_j(t_0, x_{10},\ldots,x_{n0}) = 0$, $j = 1,\ldots,m$, а также функционалом с терминальным членом $G(T, x_1(T),\ldots,x_n(T)) + Q(t_0, x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0))$ или $G(T, x_1(T),\ldots,x_n(T), t_0, x_1(t_0),\ldots, x_n(t_0))$.

Теорема 8 (необходимые условия экстремума функционала в задаче (*)).

Если на вектор-функции $x^*(t) = \left(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)\right)^T$, *где* $x_i{}^*(t) \in C^1(\Delta)$, *удовлетворяющей граничным условиям* $x^*(t_0) = x_0$, $\varphi_j\left(T^*, x_1^*(T^*),\dots,x_n^*(T^*)\right) = 0$, $j = 1,\dots,p$, *функционал достигает слабого экстремума, то функции* $x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)$ *удовлетворяют:*

а) *системе уравнений Эйлера*

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} = 0\,, \quad i = 1,\dots,n;$$

б) *условиям трансверсальности*

$$\sum_{i=1}^{n} \left[F_{x_i'} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] \Bigg|_{T^*, x^*(T^*)} \delta x_{iT} + \left[F + \frac{\partial G}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} x_i' \, F_{x_i'} \right] \Bigg|_{T^*, x^*(T^*)} \delta T = 0\,,$$

$$\delta\varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \Bigg|_{T^*, x^*(T^*)} \delta T + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Bigg|_{T^*, x^*(T^*)} \delta x_{iT} = 0\,, \quad j = 1,\dots,p\,.$$

З а м е ч а н и я.

1. Если значение T задано, а правый конец допустимых кривых скользит по прямой с уравнением $t = T$, то вариация $\delta T = 0$. В силу произвольности вариаций δx_{iT}, $i = 1,\dots,n$, из получаем

$$F_{x_i'} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \Bigg|_{T, x^*(T)} = 0\,, \quad i = 1,\dots,n\,.$$

2. Если правый конец допустимых кривых удовлетворяет соотношениям $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, то из $\varphi_i(t, x_1,\dots,x_n) = x_i - \varphi_i(t) = 0$ в силу произвольности δT получаем

$$F + \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\varphi_i' - x_i'\right) F_{x_i'} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \varphi_i' \right] \Bigg|_{T^*, x^*(T^*)} = 0\,.$$

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ (*)

1. Записать систему уравнений Эйлера.
2. Найти общее решение системы $x_i = x_i(t, C_1, C_2,\dots,C_{2n})$, $i = 1,\dots,n$.
3. Записать условия трансверсальности (в зависимости от вида граничных условий) и граничные условия.
4. Определить $C_1,\dots,C_{2n}, T^*$ и выписать экстремаль $x^*(t) = \left(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)\right)^T$.

Пример. Найти экстремаль функционала

$$I[x_1(t),x_2(t)]=\int\limits_0^1 \left[\, x_1'(t)x_2'(t)+x_1(t)x_2(t)\,\right]dt+x_1(1)+x_2(1),$$

удовлетворяющую граничным условиям: $x_1(0)=x_2(0)=0$.

☐ 1. Запишем систему уравнений Эйлера. Так как $F=x_1'\,x_2'+x_1x_2$,

$$F_{x_1}=x_2,\quad F_{x_1'}=x_2',\quad \frac{d}{dt}F_{x_1'}=x_2'',\quad F_{x_2}=x_1,\quad F_{x_2'}=x_1',\quad \frac{d}{dt}F_{x_2'}=x_1'', \text{ то}$$

$$F_{x_1}-\frac{d}{dt}F_{x_1'}=x_2-x_2''=0,$$

$$F_{x_2}-\frac{d}{dt}F_{x_2'}=x_1-x_1''=0.$$

2. Найдем общее решение системы $x_1''-x_1=0$, $x_2''-x_2=0$:

$$x_1(t)=C_1e^t+C_2e^{-t},\qquad x_2(t)=C_3e^t+C_4e^{-t}.$$

3. Запишем условия трансверсальности, учитывая, что значение $T=1$ задано, а $x_1(1)$ и $x_2(1)$ произвольны. Поскольку $G(t,x_1,x_2)=x_1+x_2$, то

$$\left.F_{x_1'}+\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{T=1}=x_2'(1)+1=0,$$

$$\left.F_{x_2'}+\frac{\partial G}{\partial x_2}\right|_{T=1}=x_1'(1)+1=0.$$

Используем граничные условия:

$$x_1(0)=C_1+C_2=0,$$

$$x_2(0)=C_3+C_4=0.$$

4. Определим C_1,C_2,C_3,C_4. Имеем $C_1=-C_2$, $C_3=-C_4$, $x_1'(t)=C_1e^t-C_2e^{-t}$, $x_2'(t)=C_3e^t-C_4e^{-t}$, а также

$$x_2'(1)+1=C_3e-C_4e^{-1}+1=0,$$

$$x_1'(1)+1=C_1e-C_2e^{-1}+1=0.$$

Отсюда $C_2=\dfrac{1}{e+e^{-1}}=\dfrac{e}{e^2+1}$, $C_1=-\dfrac{e}{e^2+1}$, $C_4=\dfrac{e}{e^2+1}$, $C_3=-\dfrac{e}{e^2+1}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t)=\left(x_1^*(t),x_2^*(t)\right)^T$: $x_1^*(t)=x_2^*(t)=-\dfrac{e}{e^2+1}e^t+\dfrac{e}{e^2+1}e^{-t}$.■