Лекция 15. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

На практике существуют задачи оптимизации, в которых критерий качества зависит от функции, определить которую необходимо так, чтобы критерий принял минимальное или максимальное значение.

Вариационными задачами называются задачи о поиске экстремума функционалов, т.е. величин, численное значение которых определяется выбором одной или нескольких функций.

Пример. На плоскости (t, x) заданы две точки (t_0, x_0), (T, x_T). Требуется соединить эти две точки гладкой кривой, имеющей наименьшую длину (рис. 1).

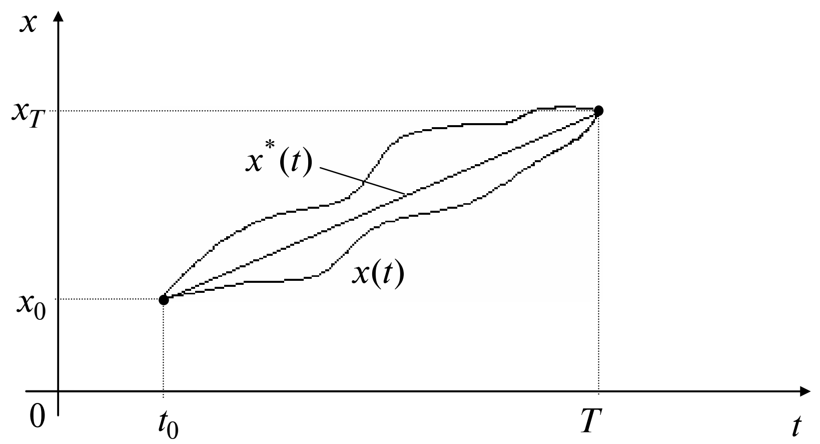

Рис. 1

□ Длина кривой, соединяющей две заданные точки, находится по формуле

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt \; .$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению такой непрерывной функции $x^*(t)$, имеющей на отрезке $[t_0, T]$ непрерывную производную и удовлетворяющей заданным граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$, на которой критерий $I[x(t)]$ примет минимальное значение. Критерий зависит от функции $x(t)$ и представляет собой функционал. Очевидно, решением является прямая $x^*(t)$, соединяющая две заданные точки. ■

Переменная $I[x(t)]$ называется ***функционалом***, зависящим от функции $x(t)$, если каждой кривой из заданного класса функций $\mathscr{M}$ соответствует вполне определенное действительное значение I, т.е. функции $x(t)$ соответствует число.

Класс $\mathscr{M}$ функций (кривых), на которых определен функционал, называется его ***областью определения***.

Пример 2. Найти значения функционала $I[x(t)] = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$ на следующих кривых, образующих класс $\mathcal{M}$: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = -(t-1)^2 + 1$ (рис. 2).

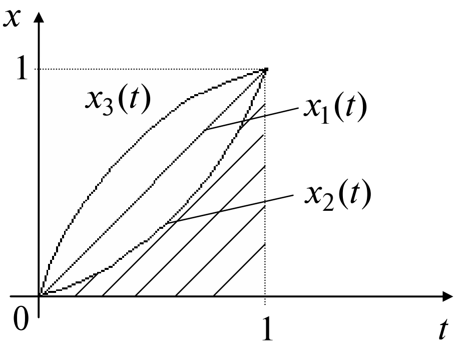

Рис. 2

□ Заметим, что все кривые проходят через две точки $(0;0)$, $(1;1)$, т.е. удовлетворяют граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Найдем значения функционала, соответствующие каждой кривой из класса $\mathcal{M}$:

$$I[x_1(t)] = \int\limits_0^1 t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}; \qquad I[x_2(t)] = \int\limits_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$I[x_3(t)] = \int\limits_0^1 [\,-(t-1)^2 + 1\,]\,dt = \frac{2}{3}.$$

В данном примере функционал имеет простой физический смысл – площадь под кривой $x(t)$. Каждой кривой из класса $\mathcal{M}$ поставлено в соответствие число, равное площади. Очевидно, может быть сформулирована задача о нахождении такой кривой из класса $\mathcal{M}$, площадь под которой была бы минимальна (максимальна). ■

Функционал $I[x(t)]$ называется ***непрерывным***, если малому приращению функции $x(t)$ соответствует малое изменение функционала. Уточним, какие изменения функции называются малыми или, что то же самое, какие кривые называются близкими.

Будем полагать, что функционал $I[x(t)]$ определен на элементах $x(t)$ *линейного нормированного пространства* функций, в котором каждому элементу $x(t)$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, называемое *нормой* элемента, при этом выполняются следующие условия:

1) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{0}$ – *нулевой элемент*);

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

для любых элементов x, y, принадлежащих пространству, и любого действительного числа λ.

Предметом нашего рассмотрения будут, как правило, пространства C^0, C^1.

Пространство $C^0([t_0,T])$ состоит из непрерывных функций (кривых) $x(t)$, определенных на отрезке $[t_0,T]$. В пространстве $C^0([t_0,T])$ норма вводится следующим образом: $\|x\|_0 = \max\limits_{t\in[t_0,T]} |\,x(t)\,|$.

Пусть $x^*(t)\in C^0([t_0,T])$ и $\varepsilon>0$ – произвольное число.

ε-окрестностью нулевого порядка кривой $x^*(t)$ называется совокупность кривых $x(t)\in C^0([t_0,T])$, такая, что

$$\left\|x-x^*\right\|_0 = \max_{t\in[t_0,T]}\left|\,x(t)-x^*(t)\right| < \varepsilon . \tag{1}$$

Это означает, что расстояние от кривой $x^*(t)$ до кривых $x(t)$ мало (рис. 3), т.е. графики кривых $x(t)$ целиком лежат внутри полосы шириной 2ε, окружающей график функции $x^*(t)$. В данном случае можно считать близкими кривые, близкие по ординатам.

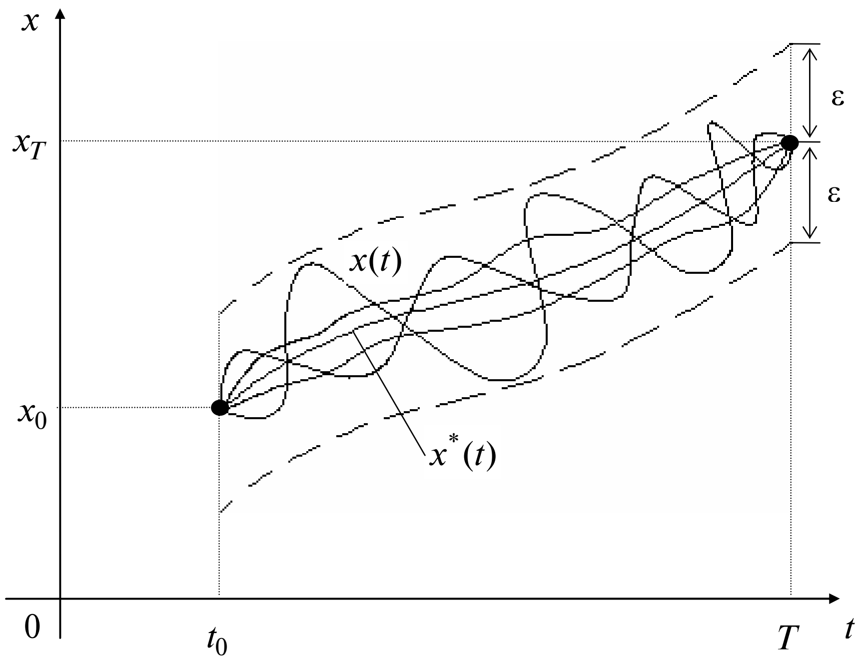

Рис. 3

Пространство $C^1([t_0,T])$ состоит из непрерывных функций (кривых) $x(t)$, определенных на отрезке $[t_0,T]$ и имеющих на этом отрезке непрерывную производную. В пространстве $C^1([t_0,T])$ норма вводится следующим образом:

$$\|\,x\,\|_1 = \max_{t\in[t_0,T]}\left|\,x(t)\,\right| + \max_{t\in[t_0,T]}\left|\,x'(t)\,\right|.$$

Пусть $x^*(t)\in C^1([t_0,T])$ и $\varepsilon>0$ – произвольное число.

ε-окрестностью первого порядка кривой $x^*(t)$ называется совокупность кривых $x(t)\in C^1([t_0,T])$, такая, что

$$\left\| x - x^* \right\|_1 = \max_{t \in [t_0, T]} \left| x(t) - x^*(t) \right| + \max_{t \in [t_0, T]} \left| x'(t) - x^{*\prime}(t) \right| < \varepsilon \ . \tag{2}$$

Это означает, что у кривых $x(t)$ и кривой $x^*(t)$ близки не только ординаты, но и значения производных (рис. 4). Действительно, если $\left\| x - x^* \right\|_1 < \varepsilon$, то для всех $t \in [t_0, T]$ справедливы неравенства $\left| x(t) - x^*(t) \right| < \varepsilon$ и $\left| x'(t) - x^{*\prime}(t) \right| < \varepsilon$. Отсюда следует, что кривая, принадлежащая ε-окрестности первого порядка, принадлежит и ε-окрестности нулевого порядка (см. рис. 3).

Аналогично вводится норма в пространстве $C^m([t_0, T])$ функций, имеющих непрерывные производные до порядка m включительно, т.е.

$$\| x \|_m = \sum_{p=0}^{m} \max_{t \in [t_0, T]} \left| x^{(p)}(t) \right| .$$

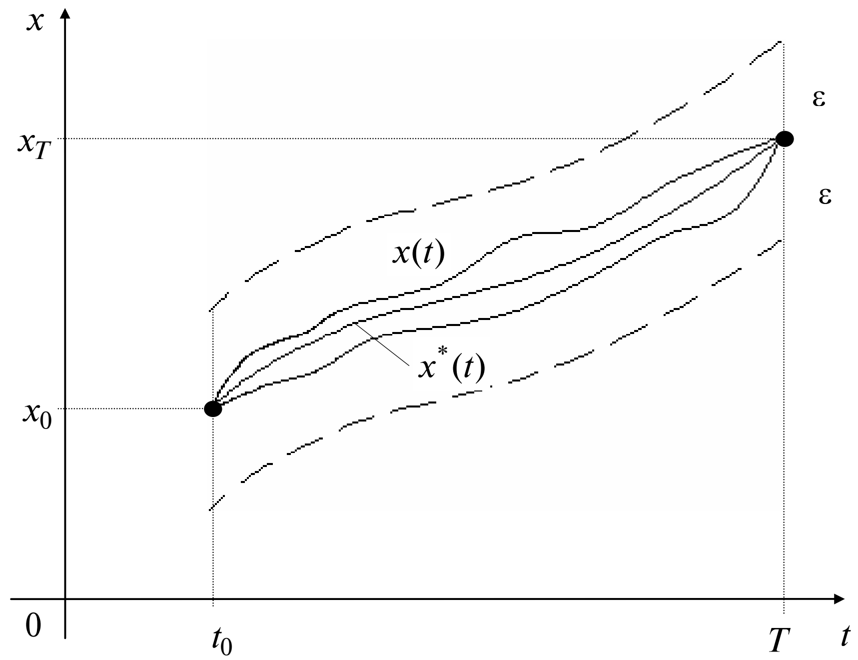

Рис. 4

Кривые $x(t)$, на которых сравниваются значения функционала, называются ***допустимыми кривыми*** или ***кривыми сравнения***.

Обозначим через $x^*(t)$ допустимую кривую, на которой функционал достигает экстремума, а через $x(t)$ произвольную допустимую кривую. Разность $x(t) - x^*(t) = \delta x(t)$ называется ***вариацией кривой*** $x^*(t)$.

Вариация $\delta x(t)$ есть функция t и принадлежит тому же функциональному пространству, что и функция $x(t)$. Используя вариацию $\delta x(t)$, можно представить любую допустимую кривую $x(t)$ в виде

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) . \tag{3}$$

Однако нами используется и другая запись

$$x(t) = x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)\ . \tag{4}$$

В выражении (4) $\delta x(t)$ – фиксированная функция, а α – числовой параметр. Очевидно, что при $\alpha = 0$ справедливо $x(t) = x^*(t)$.

Назовем ***приращением функционала*** ΔI разность

$$\Delta I = I[x(t)] - I[x^*(t)]. \tag{5}$$

Линейным функционалом называется функционал $I[x(t)]$, удовлетворяющий следующим условиям: $I[\,c\cdot x(t)\,] = c\cdot I[x(t)]$, $I[x_1(t) + x_2(t)] = I[x_1(t)] + I[x_2(t)]$, где c – произвольная постоянная.

Дадим определение первой вариации функционала с использованием (3).

Если приращение функционала $\Delta I = I\left[x^*(t) + \delta x(t)\right] - I\left[x^*(t)\right]$ можно представить в виде

$$\Delta I = \delta I\left[x^*(t), \delta x\right] + \beta\left[x^*(t), \delta x\right]\cdot \max|\delta x|,$$

где $\delta I\left[x^*(t), \delta x\right]$ – линейный по отношению к $\delta x(t)$ функционал, $\max|\delta x|$ – максимальное значение $|\delta x|$ и $\beta\left[x^*(t), \delta x\right] \to 0$ при $\max|\delta x| \to 0$, то главная, линейная по отношению к δx часть приращения функционала, т.е. $\delta I\left[x^*(t), \delta x\right]$, называется ***первой вариацией функционала.***

Можно дать другое определение первой вариации, используя (4).

Так как $I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)]$ есть функция $\varphi(\alpha)$ числового параметра α, то, разложив эту функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $\alpha = 0$ по степеням α , найдем

$$\Delta I = I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)] - I[x^*(t)] = \alpha\,\delta I + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 I + \ldots\ , \tag{6}$$

где

$$\delta I = \frac{d\,\varphi(\alpha)}{d\,\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{d\,I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)]}{d\,\alpha}\Big|_{\alpha=0} \tag{7}$$

и называется ***первой вариацией функционала***,

$$\delta^2 I = \frac{d^2 I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)]}{d\,\alpha^2}\Big|_{\alpha=0}$$

и называется ***второй вариацией функционала*** и т.д.

З а м е ч а н и я.

1. Мы привели два определения вариации функционала. Если существует вариация в смысле главной линейной части приращения функционала, то существует вариация в смысле производной по параметру и эти определения эквивалентны.

2. В литературе вместо $I[x(t)]$ часто используется обозначение $I[x(\cdot)]$, чтобы явно различить элемент $x(\cdot)$ соответствующего функционального пространства и значение функции $x(t)$ при фиксированном t .

3. Каждую функцию, принадлежащую классу $\mathscr{M}$, можно рассматривать как точку некоторого пространства.

Говорят, что функционал $I[x(t)]$, определенный на классе $\mathcal{M}$ кривых $x(t)$, достигает на кривой $x^*(t)$ ***глобального минимума*** (максимума), если

$$I[x^*(t)] \le I[x(t)] \qquad \Big\lfloor\, I[x^*(t)] \ge I[x(t)] \,\Big\rfloor \quad \forall x(t) \in \mathcal{M}\,.$$

Пример 3. Найти глобальные максимум и минимум функционала из примера 2.

□ Очевидно, на заданном классе $\mathcal{M}$ допустимых кривых функции $x_2(t) = t^2$ соответствует наименьшее значение функционала (ей соответствует наименьшая площадь под кривой на рис. 2), а кривой $x_3(t)$ – наибольшее значение (ей соответствует наибольшая площадь под кривой на рис. 2). ■

Понятие локального минимума (максимума) связано с исследованием поведения функционала на близких кривых. Различают сильный и слабый локальный минимум (максимум).

Говорят, что функционал $I[x(t)]$ достигает на кривой $x^*(t)$ ***сильного минимума*** (максимума), если $I[x^*(t)] \le I[x(t)]$ $\Big\lfloor\, I[x^*(t)] \ge I[x(t)] \,\Big\rfloor$ в ε-окрестности нулевого порядка кривой $x^*(t)$.

Говорят, что функционал $I[x(t)]$ достигает на кривой $x^*(t)$ ***слабого минимума*** (максимума), если $I[x^*(t)] \le I[x(t)]$ $\Big\lfloor\, I[x^*(t)] \ge I[x(t)] \,\Big\rfloor$ в ε-окрестности первого порядка кривой $x^*(t)$.

Локальные минимумы и максимумы функционала называются его ***локальными экстремумами***.

З а м е ч а н и е. Всякий сильный экстремум функционала является и слабым, а обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому любое условие, необходимое для слабого экстремума, необходимо и для сильного.

Необходимые условия локального экстремума одинаковы для сильного и слабого экстремума и определяются следующей теоремой.

Теорема 1. (необходимые условия локального экстремума).

Если функционал $I[x(t)]$, *имеющий вариацию, достигает минимума или максимума на кривой* $x^*(t)$, *где* $x^*(t)$ *есть внутренняя точка области определения функционала, то при* $x(t) = x^*(t)$ *первая вариация функционала равна нулю*:

$$\delta I = 0. \tag{8}$$

З а м е ч а н и я.

1. Доказательство необходимых условий экстремума функционала опирается на тот факт, что при фиксированных $x^*(t)$ и $\delta x(t)$ функционал $I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)] = \varphi(\alpha)$ является функцией параметра α. При $\alpha = 0$ функционал достигает экстремального значения $I\big[x^*(t)\big]$. Заметим, что α может принимать в окрестности точки $\alpha = 0$ как положительные, так и отрицательные значения (при этом $x^*(t)$ является внутренней точкой в области определения функционала). Так как точка $\alpha = 0$ является точкой локального экстремума функции $\varphi(\alpha)$, то, применяя необходимые условия локального экстремума функций [36], получаем

$$\varphi'(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\alpha} I\left[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)\right]\Bigg|_{\alpha=0} = 0\,. \tag{9}$$

2. Различие между сильным и слабым экстремумами не имеет существенного значения при выводе необходимого условия экстремума, но весьма существенно при выводе и применении достаточных условий экстремума.

При выводе необходимых условий экстремума для различных постановок вариационных задач применяется следующая важная теорема.

Теорема 2 (основная лемма вариационного исчисления).

Если для каждой непрерывной функции $\eta(t)$

$$\int_{t_0}^{T} a(t)\,\eta(t)\,dt = 0\,, \tag{10}$$

где функция $a(t)$ *непрерывна на отрезке* $[t_0, T]$, *то* $a(t) \equiv 0$ *на том же отрезке.*

З а м е ч а н и я.

1. Утверждение основной леммы вариационного исчисления и ее доказательство не изменятся, если на функцию $\eta(t)$ наложить следующие ограничения: $\eta(t)$ имеет непрерывную производную; $\eta(t_0) = \eta(T) = 0$.

2. Все изложенное в этом разделе без изменения переносится на функционалы $I[x(t)] = I[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$, зависящие от вектор-функции $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ одной переменной или зависящие от функций нескольких переменных. Для таких функционалов вариация также определяется как главная линейная часть приращения функционала и доказывается, что на функциях (вектор-функциях), на которых реализуется экстремум, вариация равна нулю.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

2.1. МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

2.1.1. Функционалы $\int_{t_0}^{T} F(t, x(t), x'(t))\,dt$, зависящие от одной функции

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$, где t_0 и T заданы, т.е. $x(t) \in C^1([t_0, T])$;

б) функции $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(T) = x_T\,, \tag{1}$$

где значения x_0, x_T заданы, т.е. кривые проходят через две закрепленные граничные точки.

На множестве $\mathcal{M}$ задан функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} F\big(t, x(t), x'(t)\big)dt, \tag{2}$$

где подынтегральная функция $F(t, x, x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{M}$, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал (2) достигает экстремума, т.е.

$$I[x^*(t)] = \underset{x(t)\in\mathcal{M}}{\operatorname{extr}} \int_{t_0}^{T} F\big(t, x(t), x'(t)\big)dt. \tag{3}$$

Так как на кривые $x(t)$, образующие множество $\mathcal{M}$, не наложено дополнительных условий, кроме граничных, задача (3) называется задачей поиска ***безусловного экстремума***. Этому классу задач посвящена вторая глава. В третьей главе рассматриваются задачи поиска ***условного экстремума***, когда на искомые функции кроме граничных условий накладываются дополнительные конечные, интегральные или дифференциальные условия.

СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Стратегия поиска решения задачи (3) состоит в определении первой вариации δI функционала $I[x(t)]$ и приравнивании ее к нулю согласно теореме 1 о необходимом условии экстремума функционала. В результате получаются соотношения, позволяющие найти кривые, "подозрительные" на наличие экстремума функционала.

С помощью анализа второй вариации функционала выводятся различные достаточные условия экстремума, позволяющие сделать вывод о достижении сильного или слабого минимума или максимума.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧЕ (3)

Обозначим $x^*(t)$ – кривую, на которой достигается экстремум функционала. Тогда допустимая кривая определяется по формуле: $x(t) = x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)$, а ее производная $x'(t) = x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t)$, где $\delta x(t)$ – фиксированная вариация кривой, $\delta x'(t) = \big(\delta x(t)\big)'$ – производная вариации, α – числовой параметр. Заметим, что $\delta x(t) \in C^1([t_0, T])$, $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(T) = 0$. Тогда

$$I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)] = \int_{t_0}^{T} F\big(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t)\big)dt = \varphi(\alpha), \tag{4}$$

где $\varphi(\alpha)$ – функция числового параметра α.

Используя формулу для вычисления первой вариации функционала, имеем

$$\delta I = \frac{d\,\varphi(\alpha)}{d\,\alpha}\Bigg|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\,\alpha}\int_{t_0}^{T} F\Big(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t)\Big)\Big|_{\alpha=0} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \Big[F_x\Big(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t)\Big)\Big|_{\alpha=0} \delta x(t) +$$

$$+ F_{x'}\Big(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t)\Big)\Big|_{\alpha=0} \delta x'(t)\Big] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left[F_x(t, x^*(t), x^{*\prime}(t))\,\delta x(t) + F_{x'}(t, x^*(t), x^{*\prime}(t))\,\delta x'(t)\right] dt, \tag{5}$$

где $F_x = \dfrac{\partial F\big(t, x, x'\big)}{\partial x}$, $F_{x'} = \dfrac{\partial F\big(t, x, x'\big)}{\partial x'}$ – соответствующие производные подынтегральной функции.

В выражении (5) проинтегрируем второе слагаемое по частям, учитывая, что $\delta x'(t) = \big(\delta x(t)\big)'$, $u = F_{x'}$, $dv = \delta x'(t)dt = \big(\delta x(t)\big)' dt$, $\int_{t_0}^{T} u\,dv = u \cdot v\Big|_{t_0}^{T} - \int_{t_0}^{T} v\,du$. Отсюда $du = \dfrac{d}{dt} F_{x'}\,dt$, $v = \delta x(t)$ и

$$\delta I = \left[F_{x'}\,\delta x(t)\right]\Big|_{t_0}^{T} + \int_{t_0}^{T} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'}\right] \delta x(t)\,dt. \tag{6}$$

Так как $\delta x\big(t_0\big) = 0$, $\delta x\big(T\big) = 0$, то

$$\delta I = \int_{t_0}^{T} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'}\right] \delta x(t)\,dt. \tag{7}$$

Необходимое условие экстремума (8) в данном случае имеет вид

$$\delta I = \int_{t_0}^{T} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'}\right] \delta x(t)\,dt = 0. \tag{8}$$

К выражению (8) применима основная лемма вариационного исчисления (теорема 2), так как в силу наложенных ограничений на кривой $x^*\big(t\big)$ функция $F_x - \dfrac{d}{dt} F_{x'}$ является непрерывной, а вариация $\delta x(t)$ – произвольной непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условиям $\delta x\big(t_0\big) = 0$, $\delta x\big(T\big) = 0$.

Следовательно, кривая $x^*\big(t\big)$, на которой достигается экстремум функционала, удовлетворяет уравнению

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 . \qquad (9)$$

Уравнение (9) называется ***уравнением Эйлера***. Если функция $x^*(t)$ дважды дифференцируемая, то уравнение (9) можно записать в развернутой форме

$$F_x - F_{x't} - F_{x'x} \cdot x' - F_{x'x'} \cdot x'' = 0 \qquad (10)$$

и при $F_{x'x'} \neq 0$ представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение $x = x(t, C_1, C_2)$ зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и определяет двухпараметрическое ***семейство экстремалей***. Два граничных условия $x(t_0) = x_0$ и $x(T) = x_T$ позволяют найти постоянные C_1 и C_2 и, как следствие, кривую $x^*(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала. Только на удовлетворяющих граничным условиям экстремалях может реализовываться экстремум. Чтобы выяснить, достигается ли на экстремали экстремум функционала, а если да, то какой (минимум или максимум), следует использовать достаточные условия (см. стр. 37).

Теорема 2.1 (необходимые условия экстремума в задаче (3)).

Если на кривой $x^*(t) \in C^1([t_0, T])$, *удовлетворяющей граничным условиям* $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(T) = x_T$, *достигается слабый экстремум функционала в задаче* (3), *то она удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 .$$

Уравнение Эйлера интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Приведем некоторые простейшие ***случаи интегрируемости уравнения Эйлера***.

Первый случай. Функция $F(t, x, x')$ не зависит от x явно: $F(t, x, x') = F(t, x')$. Уравнение Эйлера (9) принимает вид $\frac{d}{dt} F_{x'} = 0$ и, следовательно,

$$F_{x'} = C_1 . \qquad (11)$$

Соотношение (11) называется *первым интегралом* уравнения Эйлера.

Второй случай. Функция $F(t, x, x')$ не зависит от t и x явно: $F(t, x, x') = F(x')$. Уравнение Эйлера (2.10) записывается в форме $F_{x'x'} \cdot x'' = 0$. Его общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 t + C_2 , \qquad (12)$$

так как $x'' = 0$, а условие $F_{x'x'} = 0$ дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Если уравнение $F_{x'x'}(x') = 0$ имеет один или несколько действительных корней вида $x' = k_i$, то получаем однопараметрические семейства прямых $x(t) = k_i t + C$, содержащиеся в двухпараметрическом семействе (2.12).

Третий случай. Функция $F(t,x,x')$ не зависит от t и x' явно: $F(t,x,x')=F(x)$ или не зависит от x' явно: $F(t,x,x')=F(t,x)$. Задача (3) в общем случае решения не имеет, так как уравнение Эйлера (9) принимает вид

$$F_x = 0 \tag{13}$$

и не является дифференциальным, т.е. его решение не содержит элементов произвола и поэтому не удовлетворяет граничным условиям. Однако, если решение уравнения $F_x = 0$ проходит через граничные точки (t_0, x_0) и (T, x_T), экстремаль существует.

Четвертый случай. Подынтегральная функция имеет вид $F(t,x,x')=P(t,x)+Q(t,x)x'$. Уравнение Эйлера записывается в форме $P_x + Q_x\,x' - \frac{d}{dt}Q(t,x) = P_x + Q_x\,x' - Q_t - Q_x\,x' = 0$, или

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0. \tag{14}$$

Это уравнение не является дифференциальным. Если его решение удовлетворяет граничным условиям, то экстремаль существует. Если $\frac{\partial P}{\partial x} \equiv \frac{\partial Q}{\partial t}$, то под знаком интеграла (2) находится полный дифференциал и, следовательно, величина интеграла не зависит от пути интегрирования, а вариационная задача теряет смысл.

Пятый случай. Функция $F(t,x,x')$ не зависит от t явно: $F(t,x,x')=F(x,x')$. Уравнение Эйлера (10) имеет вид

$$F_x - F_{x'x}\,x' - F_{x'x'}\,x'' = 0,$$

так как $F_{x't} = 0$. Если умножить левую и правую части уравнения на x', то левая часть превращается в производную $\frac{d}{dt}\left[F - x'\,F_{x'}\right]$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left[F - x'F_{x'}\right] = F_x\,x' + F_{x'}\,x'' - x''\,F_{x'} - x'\,F_{x'x}\,x' - x'\,F_{x'x'}\,x'' = x'\left[F_x - F_{x'x}x' - F_{x'x'}x''\right].$$

Поэтому уравнение Эйлера может быть записано в виде $\frac{d}{dt}\left[F - x'\,F_{x'}\right] = 0$ и имеет первый интеграл

$$F - x'\,F_{x'} = C_1. \tag{15}$$

Заметим, что часто непосредственное применение уравнения Эйлера (9) оказывается проще использования первых интегралов.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ (3)

1. Найти F_x, $F_{x'}$, $\frac{d}{dt}F_{x'}$ и записать уравнение Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0.$$

Если функция $F(t,x,x')$ соответствует какому-либо случаю интегрируемости, можно использовать соотношения (11)–(15).

2. Найти общее решение уравнения Эйлера $x = x(t, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

3. Определить постоянные C_1 и C_2 из граничных условий, решая систему

$$x(t_0, C_1, C_2) = x_0 \,,$$
$$x(T, C_1, C_2) = x_T \,.$$

В результате получить экстремаль $x^*(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала.