

Лекция 14

8. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается проблема решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих независимую переменную x , неизвестные функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ и их производные $y_1'(x), \dots, y_n'(x)$.

В случае, если уравнения разрешимы относительно производных, систему можно записать в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, y_n),\end{aligned}$$

где $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, – известные функции.

Решением системы называется совокупность n функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, непрерывных на некотором интервале (a, b) , такая, что подстановка этих функций в систему обращает все уравнения в тождества.

Задача Коши для системы состоит в нахождении решения системы, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0},$$

где $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ – известные числа.

В векторной форме задача Коши имеет вид

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0,$$

где $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $F(x, Y) = (f_1(x, Y), \dots, f_n(x, Y))^T$, $Y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0})^T$.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Пусть выполнены следующие условия:

а) функции $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, определены и непрерывны в некоторой замкнутой области \overline{D} , а также имеют в \overline{D} ограниченные частные производные по переменным y_1, \dots, y_n ;

б) точка $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ лежит внутри области \overline{D} .

Тогда решение задачи Коши существует и единственно.

З а м е ч а н и я.

1. Во многих практических приложениях независимая переменная обозначается через t и имеет смысл времени, поэтому задача Коши называется начальной задачей.
2. Чтобы решить задачу Коши для дифференциального уравнения n -го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, ее необходимо привести к системе n уравнений первого порядка. Обозначая $y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, & y_1(x_0) &= y_0, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, & y_2(x_0) &= y'_0, \\ &\dots & & \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

3. Чтобы упростить изложение и в силу того, что численные методы легко обобщаются на системы уравнений, в дальнейшем будем рассматривать решение задачи Коши для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in (a, b). \quad (*)$$

Чтобы записать формулы для решения задачи Коши необходимо заменить функцию $y(x)$ на вектор-функцию $Y(x)$, $f(x, y)$ на $F(x, Y)$, а y_0 – на Y_0 .

ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Численное решение задачи (*) ищется в узлах сетки $\Omega_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, где $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$, – расстояние между соседними узлами, называемое *шагом интегрирования* (параметром сетки). Если $h_{i+1} = h = \text{const}$, сетка называется *равномерной (регулярной)*, а если $h_{i+1} = \text{var}$ – *неравномерной (нерегулярной)*. В случае равномерной сетки узлы находятся по формуле $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$.

Решение находится в виде последовательности значений $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$, являющихся приближением значений $y_0, y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ точного решения $y(x)$ в узлах сетки Ω_n (рис. 1).

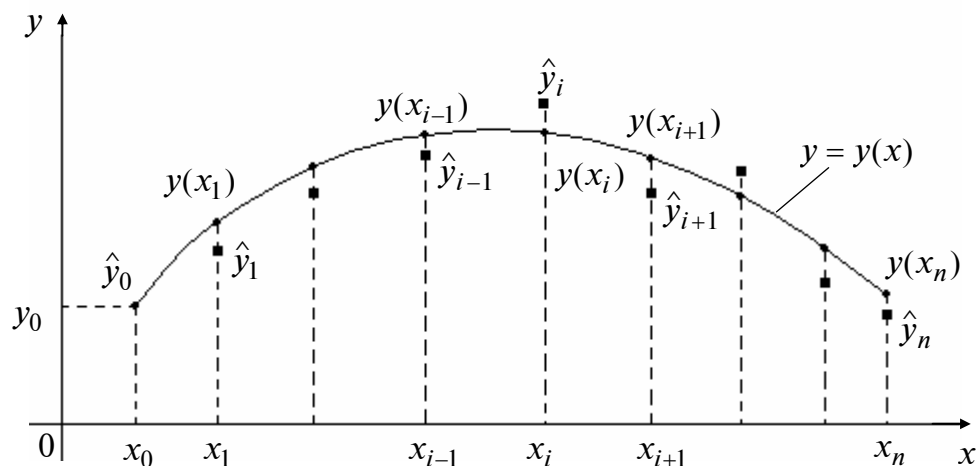


Рис. 1

Численные дискретные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющие найти решение только в узлах сетки, делятся на две группы: *явные* и *неявные*.

Значение \hat{y}_{i+1} на $(i + 1)$ -м шаге может определяться *явно*:

$$\hat{y}_{i+1} = \Phi(x_{i-k+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, \hat{y}_{i-k+1}, \dots, \hat{y}_{i-1}, \hat{y}_i),$$

где $\Phi(\cdot)$ – некоторая функция, зависящая от конкретного метода (кроме последней рассчитанной точки (x_i, \hat{y}_i) могут использоваться еще $(k - 1)$ предыдущих точек), или *неявно*:

$$\hat{y}_{i+1} = \Phi(x_{i-k+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i-k+1}, \dots, \hat{y}_{i-1}, \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1}),$$

где искомая величина \hat{y}_{i+1} входит одновременно и в левую, и в правую часть.

Явные и неявные методы делятся также на *одношаговые* и *многошаговые* (k -шаговые). В одношаговых методах для расчета очередной точки (x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) требуется информация только о последней рассчитанной точке (x_i, \hat{y}_i) . В k -шаговых методах для нахождения точки (x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) требуется информация о k предыдущих точках.

Формулы явных или неявных методов в общем случае представляют собой нелинейные уравнения относительно \hat{y}_{i+1} и называются *разностными схемами*.

Локальной ошибкой численного метода на $(i + 1)$ -м шаге называется величина

$$\varepsilon_{i+1}(h) = \hat{y}_{i+1} - y(x_{i+1}),$$

где $y(x_{i+1})$ – значение точного решения при $x = x_{i+1}$, а \hat{y}_{i+1} – приближенное решение, получаемое по формулам при условии, что вместо приближенных значений $\hat{y}_i, \hat{y}_{i-1}, \dots, \hat{y}_{i-k+1}$ используются значения, соответствующие точному решению, т.е. $y(x_i), y(x_{i-1}), \dots, y(x_{i-k+1})$.

Глобальной ошибкой называется величина $e_n(h) = \hat{y}_n - y(x_n)$, где \hat{y}_n – значение, получаемое по формулам при $i = n - 1$.

Глобальная ошибка определяется:

а) ошибками округления и ошибками арифметических действий, обусловленными числом разрядов компьютера и характером выполняемых операций для расчета значения искомой функции в очередной точке x_{i+1} ;

б) методическими ошибками, определяемыми выбранным алгоритмом;

в) переходными ошибками, обусловленными тем, что при расчете значения \hat{y}_{i+1} вместо точных значений $y(x_i), y(x_{i-1}), \dots, y(x_{i-k+1})$ берутся приближенные значения $\hat{y}_i, \hat{y}_{i-1}, \dots, \hat{y}_{i-k+1}$, полученные на предыдущих шагах.

Локальные ошибки «переносятся» в точку x_n и формируют глобальную ошибку.

Число p называется *порядком (точностью) численного метода*, если его глобальная ошибка есть O больше от h^p , т.е. $e_n(h) = O(h^p)$.

Пояснение. Пусть $R(h)$ – некоторая функция переменной h (как правило, $R(h)$ – остаточное слагаемое некоторой аппроксимационной формулы) с конечной областью определения D_R на полуоси $h > 0$, причем $h \in D_R$. Тогда, если при некотором $h \leq h_0$ справедливо неравенство $|R(h)| \leq ch^k$, где $c = \text{const}$, не зависящая от h , k – целое число, $h_0 > 0$, то пишут $R(h) = O(h^k)$ и говорят, что $R(h)$ есть « O больше от h^k » при $h \rightarrow 0$.

На практике в качестве характеристики точности метода часто используется величина $\varepsilon(h) = \max_{i=0,1,\dots,n} |\hat{y}_i - y(x_i)|$.

Можно показать, что если локальная ошибка имеет порядок $(p+1)$, т.е. $\varepsilon_{i+1}(h) = O(h^{p+1})$, то глобальная погрешность имеет на единицу меньший порядок, т.е. $e_n(h) = O(h^p)$.

Перейдем теперь к рассмотрению устойчивости численных методов. Она проверяется на «тестовом примере»

$$y' = \mu y, \quad y(0) = 1,$$

где μ – в общем случае комплексная константа. Дифференциальное уравнение является простейшим линейным уравнением, и для него можно получить значимые критерии устойчивости в явной форме.

Метод называется *ограниченно устойчивым*, если существует такое число $h_{\text{кр.}} > 0$, что при использовании метода для решения тестового примера, где $\text{Re } \mu < 0$, с шагом $0 < h < h_{\text{кр.}}$ при $i \rightarrow \infty$ глобальная ошибка ограничена. Величина $h_{\text{кр.}}$ называется *критическим шагом*. Если $h > h_{\text{кр.}}$, глобальная ошибка может неограниченно возрастать. В ограниченно устойчивых методах при задании величины шага h необходимо учитывать значение критического шага $h_{\text{кр.}}$. Для сложных дифференциальных уравнений и систем

нахождение $h_{кр.}$ является самостоятельной задачей, а свойство ограниченной устойчивости предупреждает вычислителя о возможных проблемах. Поэтому на практике становится актуальной задача конструирования таких методов, которые были бы устойчивы при любом значении шага, а его величина выбиралась бы только исходя из желаемой точности расчетов (при этом класс решаемых задач может быть ограничен).

Метод называется *A-устойчивым*, если при его применении с любым фиксированным положительным шагом h все численные решения тестового примера с комплексной константой μ ($\text{Re } \mu < 0$) стремятся к нулю при $i \rightarrow \infty$.

А. ЯВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А1. Явный метод Эйлера

Рассмотрим проблему нахождения численного решения задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Вводится в общем случае неравномерная сетка $\Omega_n = (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Величина шага $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ выражается через узловые точки. Для аппроксимации производной $\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{x=x_i}$ используем формулу, записанную на двухточечном шаблоне

$$Ш_{2,i} = (x_i, x_{i+1}): \left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + O(h_{i+1}) \quad \left(\frac{h_{i+1}}{2} M_{2,i}\right).$$

Далее заменяется правая часть уравнения ее сеточным представлением, т.е. $f(x, y) \rightarrow f(x_i, y_i)$, а вместо $y(x)$ рассматривается сеточная функция $\hat{y}_i \approx y(x_i)$, которая определяется только в точках сетки. Выполняется подстановка аппроксимаций производной и правой части в дифференциальное уравнение:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + O(h_{i+1}) = f(x_i, y_i).$$

После отбрасывания остаточных слагаемых получается *явная схема Эйлера первого порядка (явный метод Эйлера)*:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} f(x_i, \hat{y}_i), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad \hat{y}_0 = y_0;$$

Порядок точности метода, как правило, определяется порядком аппроксимации схем, *явный метод Эйлера является ограниченно устойчивым* с критическим шагом $h_{кр.} = -\frac{2}{\mu}$ (см. тестовый пример).

А2. Метод Эйлера-Коши

Для аппроксимации производной применяется формула:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \left(\frac{h^2}{6} M_{3,i}\right).$$

Выполняется подстановка аппроксимаций производной и правой части в дифференциальное уравнение:

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) = f(x_i, y_i).$$

После отбрасывания остаточных слагаемых получается явная схема *метода Эйлера-Коши второго порядка*:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_{i-1} + 2h \cdot f(x_i, \hat{y}_i), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Для начала расчетов требуется иметь две «разгонные» точки \hat{y}_0, \hat{y}_1 . Первая определяется известным начальным условием $\hat{y}_0 = y_0$, а вторая может быть найдена с помощью другого метода, например, по формуле: $\hat{y}_1 = y_0 + h_1 f(x_0, y_0)$.

А3. Модифицированный метод Эйлера

Модифицированный метод Эйлера второго порядка:

$$\hat{y}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} f(x_i, \hat{y}_i), \quad i = \overline{0, n-1},$$
$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_{i+\frac{1}{2}}\right), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Интервал устойчивости $h\mu \in (-2, 0)$ (здесь μ – действительное число в тестовом примере) модифицированного метода Эйлера совпадает с интервалом устойчивости явного метода Эйлера.

А4. Методы Рунге-Кутты

Формулы семейства *методов Рунге-Кутты* имеют следующую структуру:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} \cdot [b_1 K_{1,i} + b_2 K_{2,i} + \dots + b_s K_{s,i}], \quad \hat{y}_0 = y_0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$\begin{aligned}
\text{где} \quad K_{1,i} &= f(x_i, \hat{y}_i); \\
K_{2,i} &= f(x_i + c_2 h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1} a_{2,1} K_{1,i}); \\
K_{3,i} &= f(x_i + c_3 h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1} (a_{3,1} K_{1,i} + a_{3,2} K_{2,i})); \\
&\vdots \\
K_{s,i} &= f(x_i + c_s h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1} (a_{s,1} K_{1,i} + a_{s,2} K_{2,i} + \dots + a_{s,s-1} K_{s-1,i})),
\end{aligned}$$

где s – число стадий (этапов), $K_{s,i}$ – значения коэффициентов схемы Рунге–Кутты, вычисленные на основе правой части дифференциального уравнения, $c_j, j = 2, s$; $a_{l,m}, l = 2, s; m = 1, s-1$; $b_k, k = 1, s$. Первый индекс в обозначениях коэффициентов является порядковым номером, а второй соответствует индексу точки x_i – началу отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, на котором производится расчет.

В некоторых методах кроме вычисления приближенного решения \hat{y}_{i+1} определяется еще дополнительное значение \tilde{y}_{i+1} по формуле

$$\tilde{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} \cdot [\tilde{b}_1 K_{1,i} + \tilde{b}_2 K_{2,i} + \dots + \tilde{b}_s K_{s,i}],$$

порядок которого, как правило, на единицу больше или меньше обеспечиваемого выражением для \hat{y}_{i+1} . Величина $|\hat{y}_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}|$ служит для учета погрешности и управления величиной шага.

Наибольшее распространение в вычислительной практике нашел *метод Рунге–Кутты четвертого порядка*:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{6} (K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i}), \quad \hat{y}_0 = y_0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$\begin{aligned}
\text{где} \quad K_{1,i} &= f_i = f(x_i, \hat{y}_i), & K_{2,i} &= f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} K_{1,i}\right), \\
K_{3,i} &= f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} K_{2,i}\right), & K_{4,i} &= f(x_i + h_{i+1}, \hat{y}_i + h_{i+1} \cdot K_{3,i}).
\end{aligned}$$

Схема является четырехчленной, первый коэффициент $K_{1,i}$ относится к точке x_i , второй и третий – к средней точке $x_i + \frac{h_{i+1}}{2}$, четвертый – к точке x_{i+1} . Для этой схемы

$$\begin{aligned}
\text{выбираются следующие параметры:} \quad s &= 4, & c_2 = c_3 &= \frac{1}{2}; & c_4 &= 1; \\
a_{2,1} &= \frac{1}{2}; & a_{3,1} = a_{4,1} = a_{4,2} &= 0; & a_{3,2} &= \frac{1}{2}; & a_{4,3} &= 1.
\end{aligned}$$

Метод Рунге–Кутты, как и методы Эйлера, является одношаговым, так как значение \hat{y}_{i+1} вычисляется на основе текущего значения \hat{y}_i . По сравнению с явным методом Эйлера здесь на одной итерации требуется вычислять значение правой части решаемого уравнения четыре раза. Как и явный метод Эйлера, метод Рунге–Кутты не требует дополнительных разгонных точек, что позволяет легко менять шаг в процессе вычислений.

В *методе Рунге–Кутты пятого порядка точности* для расчета точки \hat{y}_{i+1} используются следующие соотношения:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{6}(K_{1,i} + 4K_{3,i} + K_{6,i}), \quad \hat{y}_0 = y_0, \quad i = \overline{0, n-1},$$

где $K_{1,i} = f(x_i, \hat{y}_i), \quad K_{2,i} = f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2}K_{1,i}\right),$

$$K_{3,i} = f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{4}(K_{1,i} + K_{2,i})\right), \quad K_{4,i} = f\left(x_i + h_{i+1}, \hat{y}_i - h_{i+1}K_{2,i} + 2h_{i+1} \cdot K_{3,i}\right);$$

$$K_{5,i} = f\left(x_i + \frac{2h_{i+1}}{3}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{27}(7K_{1,i} + 10K_{2,i} + K_{4,i})\right),$$

$$K_{6,i} = f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{25}, \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{625}(28K_{1,i} - 15K_{2,i} + 546K_{3,i} + 54K_{4,i} - 378K_{5,i})\right).$$

А5. Методы Адамса–Бэшфорта

Многошаговые схемы Адамса–Бэшфорта:

– второго порядка:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2}[3f_i - f_{i-1}], \quad i = \overline{1, n-1};$$

– третьего порядка:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{12}[23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}], \quad i = \overline{2, n-1};$$

– четвертого порядка:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}], \quad i = \overline{3, n-1};$$

– пятого порядка:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{720}[1901f_i - 2774f_{i-1} + 2616f_{i-2} - 1274f_{i-3} + 251f_{i-4}], \quad i = \overline{4, n-1},$$

где $f_i = f(x_i, \hat{y}_i)$.

Для начала расчетов по первой формуле требуются две «разгонные» точки: \hat{y}_0, \hat{y}_1 , по второй формуле – три «разгонные» точки: $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2$, по третьей формуле – четыре «разгонные» точки: $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$, по четвертой формуле – пять «разгонных» точек: $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4$. Их необходимо вычислить с порядком точности не меньше порядка точности схемы.

Методы Адамса–Бэшфорта не позволяют изменять шаг в процессе расчетов. В отличие от метода Рунге–Кутты четвертого порядка в этих методах требуется вычислять только одно новое значение правой части решаемого уравнения (системы) вместо четы-

рех. Высокая точность методов достигается при этом за счет учета информации о предыдущих точках. Напротив, в методе Рунге–Кутты, как и в других одношаговых методах, недостающую информацию о поведении правых частей системы получают в результате вычислений в специальном образом выбранных дополнительных точках.

А6. Явные методы Хемминга

Многошаговый метод Хемминга четвертого порядка точности может быть реализован тремя различными способами, в каждом из которых для нахождения точки \hat{y}_{i+1} используются четыре предыдущие точки:

$$\hat{y}_{i+1} = \frac{\hat{y}_i + \hat{y}_{i-1}}{2} + \frac{h}{48}[119f_i - 99f_{i-1} + 69f_{i-2} - 17f_{i-3}], \quad i = \overline{3, n-1};$$

или

$$\hat{y}_{i+1} = \frac{2\hat{y}_{i-1} + \hat{y}_{i-2}}{3} + \frac{h}{72}[191f_i - 107f_{i-1} + 109f_{i-2} - 25f_{i-3}], \quad i = \overline{3, n-1};$$

или

$$\hat{y}_{i+1} = \frac{\hat{y}_i + \hat{y}_{i-1} + \hat{y}_{i-2}}{3} + \frac{h}{36}[91f_i - 63f_{i-1} + 57f_{i-2} - 13f_{i-3}], \quad i = \overline{3, n-1};$$

где $f_i = f(x_i, \hat{y}_i)$. Для начала расчетов по любой из приведенных формул требуется четыре «разгонные» точки $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$.

А7. Методы прогноза и коррекции

Рассматриваемые здесь методы (схемы), называемые *составными*, известны под общим названием *методов прогноза и коррекции*. Из названия следует, что сначала «предсказывается» значение \hat{y}_{i+1} , а затем используется тот или иной метод для «корректировки» этого значения.

Таким образом, составные схемы включают в себя два шага (этапа) расчета очередного значения \hat{y}_{i+1} :

1. *Шаг «предиктор»* (предсказание), на котором рассчитывается предсказанное (предварительное) значение $\hat{y}_{i+1}^{(П)}$.

2. *Шаг «корректор»* (коррекция), на котором предсказанное значение уточняется. В результате находится значение $\hat{y}_{i+1}^{(К)}$, которое принимается за \hat{y}_{i+1} . Если промежуток интегрирования не исчерпан, оно далее используется при реализации очередного шага «предиктор» для нахождения следующего предсказанного значения $\hat{y}_{i+2}^{(П)}$.

Первый шаг реализуется с помощью явных методов, а второй шаг основан на применении формул неявных методов, в правую часть которых вместо неизвестного значения \hat{y}_{i+1} подставляется результат предсказания. Схемы такого типа называются также схемами «предиктор-корректор» и в итоге относятся к явным методам.

Приведем наиболее часто встречающиеся составные схемы.

- Предсказание с помощью явного метода Эйлера или метода Эйлера–Коши, коррекция по методу трапеций.

Шаг «предиктор»:

$$\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)} = \hat{y}_i + h_{i+1} f(x_i, \hat{y}_i) ,$$

или при условии $h_{i+1} = h = \text{const}$

$$\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)} = \hat{y}_{i-1} + 2h \cdot f(x_i, \hat{y}_i),$$

где \hat{y}_i и \hat{y}_{i-1} рассчитаны на предыдущих шагах.

Шаг «корректор»:

$$\hat{y}_{i+1} \equiv \hat{y}_{i+1}^{(K)} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} [f(x_i, \hat{y}_i) + f(x_i + h_{i+1}, \hat{y}_{i+1}^{(\Pi)})] .$$

- Предсказание по методу Адамса–Бэшфорда третьего или четвертого порядка, коррекция по методу Адамса–Мултона четвертого порядка (см. неявные методы) (при $h_{i+1} = h = \text{const}$).

Шаг «предиктор»:

$$\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)} = \hat{y}_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}] ,$$

или

$$\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)} = \hat{y}_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] .$$

Шаг «корректор»:

$$\hat{y}_{i+1} \equiv \hat{y}_{i+1}^{(K)} = \hat{y}_i + \frac{h}{24} [f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}^{(\Pi)})] .$$

- Метод Хемминга четвертого порядка (при $h_{i+1} = h = \text{const}$).

Шаг «предиктор»:

$$\hat{y}_{i+1}^{(\Pi)} = \hat{y}_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}] .$$

Шаг «корректор»:

$$\hat{y}_{i+1} \equiv \hat{y}_{i+1}^{(K)} = \frac{1}{8} (9\hat{y}_i - \hat{y}_{i-2}) + \frac{3h}{8} [-f_{i-1} + 2f_i + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}^{(\Pi)})] .$$

З а м е ч а н и е. Среди явных нашли также широкое применение методы Фельберга, Ингланда, Нюстрема, Милна, интерполяционные методы [3].

Б. НЕЯВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б1. Неявный метод Эйлера

Формула неявного метода Эйлера первого порядка точности:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1}f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \equiv \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Подчеркнем, что свойство неявности схемы обусловлено наличием искомой величины \hat{y}_{i+1} в левой и правой частях в общем случае нелинейного уравнения. Можно показать, что неявный метод Эйлера обладает свойством A -устойчивости. При реализации алгоритма решения задачи Коши неизвестное значение \hat{y}_{i+1} вычисляется одним из методов решения нелинейных уравнений. Применение метода Ньютона связано с записью уравнения в форме

$$\hat{y}_{i+1} - \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \equiv F(\hat{y}_{i+1}) = 0$$

и с дифференцированием функции $F(\hat{y}_{i+1})$, что увеличивает время расчетов из-за возможной сложности вычисления производных.

Как правило, используется метод простых итераций:

$$\hat{y}_{i+1}^{(k+1)} = \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

При применении методов Ньютона и простых итераций вначале задается или находится нулевое приближение решения по формуле $y_{i+1}^{(0)} = \hat{y}_i$ (так называемый «постоянный» прогноз) или явным методом Эйлера:

$$\hat{y}_{i+1}^{(0)} = \hat{y}_i + h_{i+1}f(x_i, \hat{y}_i).$$

Итерации завершаются при выполнении условия окончания $|\hat{y}_{i+1}^{(k+1)} - \hat{y}_{i+1}^{(k)}| \leq \varepsilon$, где ε – малое положительное число.

Б2. Метод трапеций

Формула метода трапеций - неявная одношаговая схема второго порядка точности:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} [f_i + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})] \equiv \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1},$$

где $f_i = f(x_i, \hat{y}_i)$. Подчеркнем, что свойство неявности схемы обусловлено наличием искомой величины \hat{y}_{i+1} в левой и правой частях в общем случае нелинейного уравнения. Неизвестное значение \hat{y}_{i+1} вычисляется одним из методов решения нелинейных уравнений. Можно показать, что метод трапеций является A -устойчивым.

Б3. Методы Адамса–Мултона

Многошаговые неявные схемы Адамса–Мултона:

- первого порядка (неявный метод Эйлера);
- второго порядка (метод трапеций);
- третьего порядка:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{12}[-f_{i-1} + 8f_i + 5f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})], \quad i = \overline{1, n-1};$$

- четвертого порядка:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{24}[f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})], \quad i = \overline{2, n-1};$$

и

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_{i-1} + \frac{h}{3}[f_{i-1} + 4f_i + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})], \quad i = \overline{1, n-1} \text{ (неявная схема парабол);}$$

- пятого порядка:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{720}[-19f_{i-3} + 106f_{i-2} - 264f_{i-1} + 646f_i + 251f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})], \quad i = \overline{3, n-1}.$$

где $f_i = f(x_i, \hat{y}_i)$, $f_{i-1} = f(x_{i-1}, \hat{y}_{i-1})$, $f_{i-2} = f(x_{i-2}, \hat{y}_{i-2})$, $f_{i-3} = f(x_{i-3}, \hat{y}_{i-3})$.

Для расчетов по формулам требуется получить соответствующее число «разгонных» точек. Чтобы найти искомое значение \hat{y}_{i+1} , так же как в неявном методе Эйлера и методе трапеций, требуется решить в общем случае нелинейное уравнение.

З а м е ч а н и е. Среди неявных также получили распространение методы Гира, Милна, Хемминга, Рунге–Кутты [3].