Лекция 11

5. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются *сеточные* (табличные) *функции*

$$y_i = f(x_i), \quad x_i \in [a,b], \quad i = \overline{0,n}, \tag{5.1}$$

определенные в *узлах* x_i $(i = \overline{0,n})$ *сетки* Ω_n. Каждая сетка характеризуется шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ неравномерного или ($h_{i+1} = \text{const}$) равномерного разбиения.

Однако значения функции должны быть известны при любом значении аргумента $x \neq x_i$, а в самих узлах x_i, как правило, требуется знать также первые и вторые производные, поэтому сеточные функции $y_i = f(x_i)$ необходимо *восполнять*. Данная проблема решается с помощью методов *теории приближений* путем выбора функции $y = F(x,\overline{a})$, зависящей от вектора $\overline{a} = (a_0, a_1, ..., a_m)^T$ неизвестных параметров, где m - число параметров.

Если требуется, чтобы искомая функция $y = F(x,\overline{a})$ проходила через все заданные точки, определенные сеточной функцией, то вектор неизвестных параметров находится *из условия интерполяции*:

$$F(x_i,\overline{a}) = f(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}. \tag{5.2}$$

При этом способ приближения называется *интерполяцией*, а искомая функция *интерполяционным многочленом* (*полиномом*), график которого изображен на рис. 1,а.

Если узлы и значения сеточной функции получены в ходе эксперимента и содержат случайные ошибки, то с практической точки зрения нет смысла требовать прохождения искомой функции через заданный набор точек. В этом случае логичнее *сгладить* экспериментальные данные и найти достаточно простую зависимость, характеризующую взаимосвязь между значениями аргумента и величиной функции. С этой целью вектор неизвестных параметров ищется из *интегрального условия*

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[\, F(x_i,\overline{a}) - f(x_i)\,\right]^2} \to \min_{\overline{a}} \quad (m \le n). \tag{5.3}$$

Условие (5.3) выражает минимум *среднеквадратичной погрешности* (или отклонения) представления заданной сеточной функции $f(x_i), i = \overline{0,n}$, с помощью функции $F(x,\overline{a})$. Оно относится, как правило, ко всей области определения функции $f(x_i)$, т.е. к отрезку $[a,b]$. Сомножитель $\dfrac{1}{n+1}$ иногда опускают, так как его наличие или отсутствие влияет только на величину погрешности, но не влияет на вектор $\overline{a}$, обеспечивающий ее минимум. Задача (5.3) называется задачей *интегрального сглаживания* (*задачей аппроксимации,* или приближенной замены), искомая функция – *аппроксимирующей функцией* (рис.1,б), а используемый метод решения задачи аппроксимации – *точечным методом наименьших квадратов*.

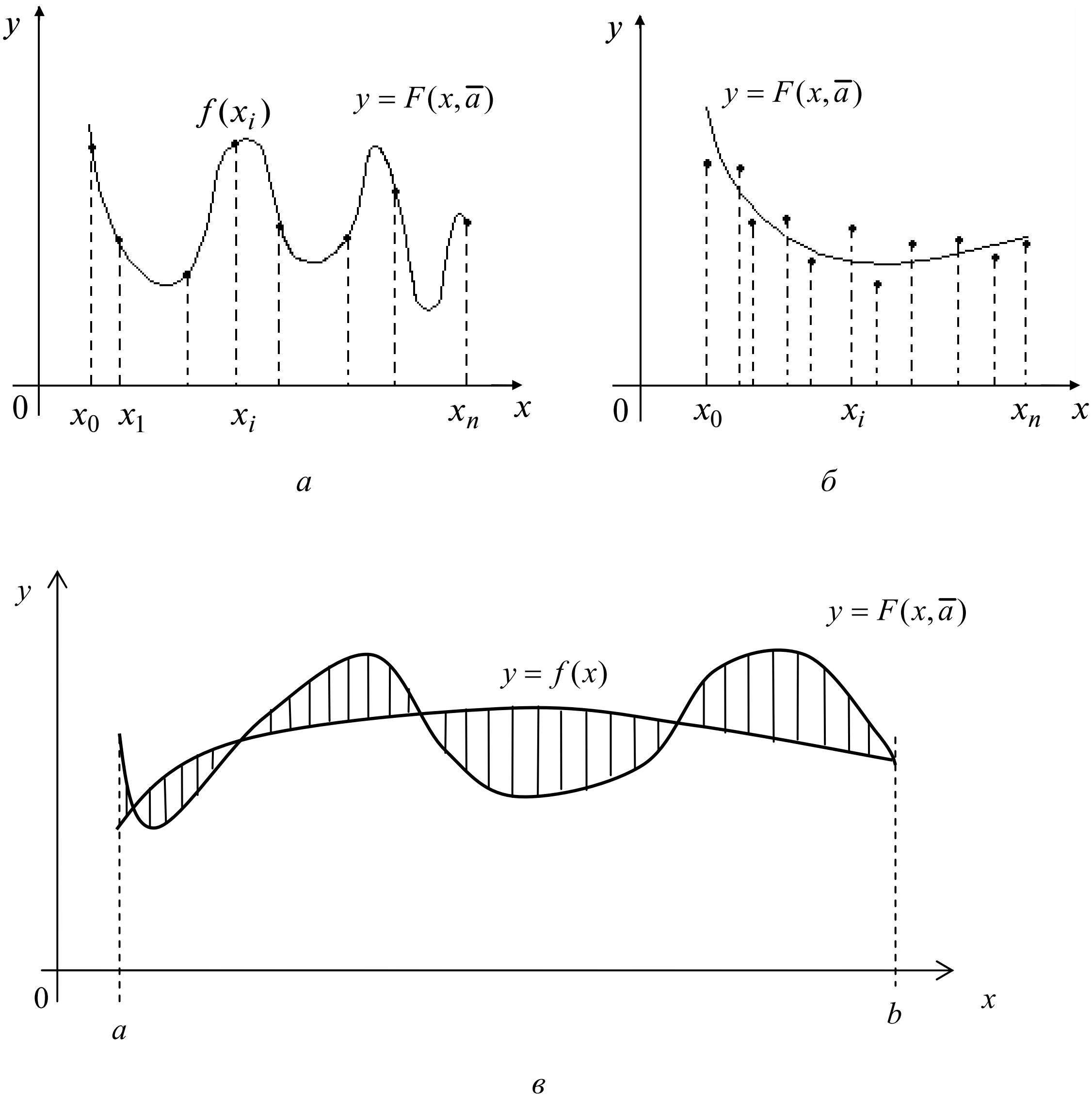

Рис. 1

Для *восполнения* исходных функций $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, искомыми функциями $y = F(x, \overline{a})$ обычно используются алгебраические многочлены

$$f_m(x, \overline{a}) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m,$$

где $\overline{a} = (a_0, a_1, ..., a_m)^T$ – вектор неизвестных параметров, m – степень многочлена (на практике $m \le n$).

Можно выделить четыре способа применения методов приближения сеточных функций, отличающихся областями их «действия».

1. *Глобальный* способ, в котором для всей области $\Omega \equiv [a, b]$ определяется одна функция $f_m(x, \overline{a})$.

2. *Локальный* способ, когда функция восполняется только в окрестности некоторой точки x_i. Это восполнение обычно осуществляется на основе формулы Тейлора.

3. *Кусочный* способ, когда ищется одна или несколько функций $f_{ki}(x, \overline{a})$ $, i = 0,1,..$, каждая из которых является многочленом степени k и имеет область определения в виде частичного отрезка $\Omega_{ik} = [x_i, x_{i+k}]$ $(1 \le k < n,\ k = 1,2,..)$, называемого «окном» аппроксимации, которое составляет *шаблон* $(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k})$. Саму функцию $f_{ki}(x, \overline{a})$, построенную на одном шаблоне, будем называть *звеном*.

4. *Кусочно-глобальный* способ, в котором область Ω представляется совокупностью N непересекающихся частичных отрезков Ω_{ik}, таких, что $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_{ik}$. На первом этапе на каждом из отрезков ищется функция $f_{ki}(x, \overline{a})$ – i-е звено с применением кусочного способа аппроксимации. На следующем этапе производится объединение всех звеньев в одну многозвенную функцию, т.е. $f_k(x, \overline{a}) = \bigcup\limits_{i=1}^{N} f_{ki}(x, \overline{a})$. Данный способ применяется, например, при построении сплайнов.

Если на отрезке $[a, b]$ задана квадратично интегрируемая функция $y = f(x)$, которая по каким-либо причинам трудна для использования (например, трудно вычислить производные), то может быть поставлена задача ее аппроксимации более простой функцией $y = F(x, \overline{a})$. Вектор неизвестных параметров $\overline{a}$ ищется из *интегрального условия*:

$$\Delta = \int_a^b [F(x, \overline{a}) - f(x)]^2\, dx \to \min_{\overline{a}}.$$

Искомая функция $y = F(x, \overline{a})$ называется *аппроксимирующей функцией*, а метод аппроксимации – *интегральным методом наименьших квадратов*. При решении этой задачи минимизируется заштрихованная площадь на рис. 1, в.

МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

А. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Пусть на множестве $\Omega = [a, b]$ задана сетка $\Omega_n = \{x_i,\ i = \overline{0, n}\}$, определяемая $n + 1$ точкой $x_0, x_1, ..., x_n$, а на сетке задана сеточная функция $y_i = f(x_i),\ i = \overline{0, n}$:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n),$$

где $x_i \in [a,b] = [x_0, x_n]$ - в общем случае неравноотстоящие узлы, определяемые шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ($h_{i+1} = \text{var}$), $i = \overline{0, n-1}$.

В некоторых случаях $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, является сеточным представлением заданной формульной функции $y = f(x)$. Сеточная функция может задаваться совокупностью пар: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$.

Требуется найти функцию $y = F(x, \overline{a})$, принимающую в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ те же значения, что и функция $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, т.е. $F(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

Точки $x_0, x_1, ..., x_n$ называются *узлами интерполяции*, а искомая функция $y = F(x, \overline{a})$ – *интерполирующей.*

Геометрически это означает, что нужно найти кривую, проходящую через заданное множество точек $(x_i, y_i), i = \overline{0, n}$ (рис.2).

Одной из целей решения задачи интерполяции является вычисление значения функции в произвольной точке x_* (или точках $x_{*j}, j = 1, ..., p$). При этом различаются собственно *интерполирование*, когда точка $x_* \in [x_0, x_n]$, и *экстраполирование*, когда $x_* \notin [x_0, x_n]$.

Заметим, что можно провести бесчисленное множество «плавных» кривых, проходящих через заданное множество точек. Поэтому задача интерполяции в общей постановке не имеет единственного решения.

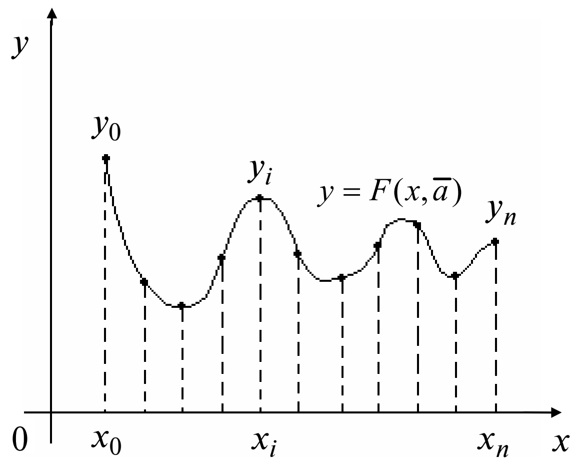

Рис. 2

Теорема (о единственности решения задачи интерполяции). *Если сеточная функция задана в* $(n+1)$*-м узле* $x_0, x_1, ..., x_n$*, а в качестве интерполирующей функции* $y = F(x, \overline{a})$ *выбран многочлен n-й степени* (*степень многочлена на единицу меньше числа узлов интерполяции*), т.е.

$$F(x, \overline{a}) = f_n(x, \overline{a}) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

то задачи интерполяции имеет единственное решение.

Значения коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$ можно найти из системы уравнений, следующей из условия интерполяции:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = y_0, \\ &a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n = y_1, \\ &.. \\ &a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = y_n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$ имеет единственное решение, так как определитель матрицы системы не равен нулю (доказательство последнего факта содержится в курсе линейной алгебры, где этот определитель называется определителем Вандермонда). Следовательно, задача интерполяции также имеет единственное решение. Описанная процедура соответствует глобальному способу решения поставленной задачи.

Методика решения задачи интерполяции

Шаг 1. По заданной сеточной функции составить интерполяционный многочлен соответствующей степени.

Шаг 2. Вычислить значения интерполяционного многочлена в заданных точках $x_{*j}, j = 1, ..., p$, путем их подстановки в формулу многочлена

Замечания.

1. Имеются различные формы записи интерполяционных многочленов. По теореме все эти многочлены степени n, удовлетворяющие условиям интерполяции и построенные по одним и тем же точкам, являются одним многочленом, записанным в разных формах.

2. При $n \ge 7$ график интерполяционного многочлена, как правило, имеет колебательный характер, т.е. содержит значительные «провалы» или «всплески» между узлами интерполяции, что весьма неудобно на практике.

При большом числе узлов решение системы (5.4) затруднительно. Искомый интерполяционный многочлен можно построить, не решая этой системы. Многочлены могут быть построены так, чтобы в самой структуре формулы многочлена условие интерполяции учитывалось. Примерами таких многочленов являются интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона.

Интерполяционный многочлен Лагранжа n-й степени имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)...(x - x_{i-1})\cdot(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdot(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} f_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P_{ni}(x)\cdot f_i,$$

где *коэффициенты Лагранжа* $P_{ni}(x)$ во внутренних точках отрезка записываются в форме $P_{ni}(x) = \dfrac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)...(x - x_{i-1})\cdot(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdot(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$.

Многочлен $L_n(x)$ является многочленом степени n и удовлетворяет условиям интерполяции: $L_n(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$.

Для записи интерполяционного многочлена Лагранжа удобно пользоваться табл.1.

Таблица 1

$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	...	$x_0 - x_n$	D_0	f_0
$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_1 - x_n$	D_1	f_1
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	...	$x_2 - x_n$	D_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	...	$x - x_n$	D_n	f_n
$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$					D_i	f_i

Здесь D_i – произведение элементов i-й строки, $\Pi_{n+1}(x)$ – произведение элементов главной диагонали. Тогда многочлен Лагранжа может быть записан в форме

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{D_i}.$$

Замечания.

1. При введении дополнительных узлов интерполяции все коэффициенты многочлена Лагранжа необходимо пересчитывать заново, что неудобно на практике. От этого недостатка свободны многочлены Ньютона.

2. Выделим «окно» или частичный отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, содержащий только две точки (шаблон (x_i, x_{i+1})). Тогда многочлен Лагранжа, интерполирующий исходную функцию на данном шаблоне, имеет вид

$$L_1(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1}.$$

Действительно, легко убедиться в том, что $L_1(x)$ – алгебраический многочлен первой степени, который удовлетворяет условиям интерполяции, т.е. $L_1(x_i) = f_i$, $L_1(x_{i+1}) = f_{i+1}$. Полученный многочлен соответствует *линейной интерполяции*, так как графиком функции является прямая линия.

3. Выделим «окно» в виде двойного частичного отрезка $[x_i, x_{i+2}]$ с шаблоном (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}). Тогда многочлен Лагранжа записывается в виде

$$L_2(x) = \frac{(x - x_{i+1}) \cdot (x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1}) \cdot (x_i - x_{i+2})} f_i + \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i) \cdot (x_{i+1} - x_{i+2})} f_{i+1} +$$

$$+ \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i) \cdot (x_{i+2} - x_{i+1})} f_{i+2}.$$

Легко проверить, что $L_2(x)$ – многочлен второй степени и также удовлетворяет условиям функциональной интерполяции: $L_2(x_i) = f_i$; $L_2(x_{i+1}) = f_{i+1}$, $L_2(x_{i+2}) = f_{i+2}$.

Полученный многочлен соответствует *параболической* (*квадратичной интерполяции*), так как графиком функции является парабола.

Б. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НЬЮТОНА

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН НЬЮТОНА ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ

Пусть исходная (интерполируемая) сеточная функция $y_i = f\left(x_i\right) = f_i, \quad i = \overline{0,n}$, задана на неравномерной сетке $\Omega_n \equiv \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, характеризующейся шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i = \text{var}$.

Выбрав внутри неравномерной сетки соответствующие шаблоны интерполяции $(x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), ..., (x_i, x_{i+1}, .., x_{i+k})$, введем следующие определения *разделенных разностей*:

– *разделенная разность нулевого порядка*: $f(x_i) = f_i$;

– *разделенная разность первого порядка*: $f(x_i, x_{i+1}) = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$;

– *разделенная разность второго порядка*: $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \dfrac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$;

– *разделенная разность k-го порядка*:

$$f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i};$$

– *разделенная разность n-го порядка в узле* x_0:

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_0, x_1, ..., x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона n-й степени имеет вид

$$N_n(x) = f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... +$$

$$+ f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}).$$

З а м е ч а н и я. Интерполяционный многочлен Ньютона (так же, как и многочлен Ньютона, выражаемый ниже через конечные разности) записан не через значения функции, как это имеет место для многочлена Лагранжа, а через разделенные разности. Поэтому при изменении степени k в процессе интерполирования у многочлена Ньютона $N_k(x)$ требуется только добавить или отбросить соответствующее число слагаемых. Это иногда упрощает алгоритм интерполирования.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НЬЮТОНА
ДЛЯ РАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ

Пусть исходная (интерполируемая) сеточная функция $y_i = f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,n}$, задана на равномерной сетке $\Omega_n \equiv \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, характеризующейся шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$.

Выбрав внутри равномерной сетки соответствующие шаблоны интерполяции $(x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), ..., (x_i, x_{i+1}, .., x_{i+k})$, введем следующие определения *конечных разностей*:

– *конечная разность нулевого порядка*: f_i;

– *конечная разность первого порядка*: $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$;

– *конечная разность второго порядка*: $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$;

– *конечная разность k-го порядка*: $\Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i) = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f_{i+j}$,

где $C_k^j = \dfrac{k!}{(k-j)!\,j!}$;

– *конечная разность n-го порядка в узле* x_0: $\Delta^n f_0 = \Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0$.

Интерполяционный многочлен Ньютона n-го порядка имеет вид

$$N_n^{(I)}(q) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} q(q-1) + ... + \frac{\Delta^n f_0}{n!} q(q-1)...(q-n+1),$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ – *фаза интерполяции относительно точки* x_0.

В. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ

Сплайн-функцией, или *сплайном,* называется совокупность $S_{m,i}(x)$– алгебраических многочленов степени m (звеньев), т.е.

$$S_{m,i}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,i} (x - x_i)^k ,$$

где $a_{k,i}$, $k = \overline{0,m}$ – коэффициенты, определенных на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, и соединенных вместе по всем частичным отрезкам так, чтобы можно было составить многозвенную функцию $S_m(x) = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} S_{m,i}(x)$, определенную и непрерывную на всем отрезке $[a,b]$ вместе со всеми своими производными $S_m^{(p)}(x)$ до некоторого их порядка $p = 1, 2, \ldots$.

Разность между m и наибольшим порядком производной, непрерывной на отрезке $[a,b]$, определяет *дефект сплайна* q.

Рассмотрим задачу восполнения заданной сеточной функции $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, $x_i \in [a,b]$ на базе интерполяционных глобальных *кубических дифференциальных сплайнов дефекта один* ($m = 3$, $q = 1$), т.е. $S_3(x) \in C_2[a,b]$. При этом предположим, что восполняемая функция достаточно гладкая.

Уравнение i-го звена сплайна ($i = 0,1,...,n-1$) ищется в виде

$$S_{3,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i}(x - x_i) + a_{2,i}(x - x_i)^2 + a_{3,i}(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

где $a_{0,i}, a_{1,i}, a_{2,i}, a_{3,i}$ - неизвестные коэффициенты. Они вычисляются на основе применения условий непрерывности (гладкости) сплайна $S_3(x)$, которые называются *условиями стыковки и согласования*:

1) условие интерполяции $S_3(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,n}$;

2) условие непрерывности во внутренних узлах сетки:

$$S_3(x_i - 0) = S_3(x_i + 0), \quad i = \overline{1,n-1};$$

3) условие непрерывности первой производной во внутренних узлах сетки:

$$S_3'(x_i - 0) = S_3'(x_i + 0), \quad i = \overline{1,n-1};$$

4) условие непрерывности второй производной во внутренних узлах сетки:

$$S_3''(x_i - 0) = S_3''(x_i + 0), \quad i = \overline{1,n-1};$$

5) условие для определения второй производной в узлах x_0, x_n:

$$S_3''(x_0) = 0, \qquad S_3''(x_n) = 0.$$

Заметим, что имеется n частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ и, следовательно, $4n$ неизвестных коэффициентов сплайна, для нахождения которых имеется $(n+1) + 3(n-1) + 2 = 4n$ условий.

Можно показать, что уравнение звена сплайна удобно записать в форме

$$S_{3,i}(x) = f_i + \left(\frac{1}{h_{i+1}} \Delta f_i - \frac{h_{i+1}}{2} m_i - \frac{h_{i+1}}{6} \Delta m_i \right) \cdot (x - x_i) +$$

$$+ \frac{m_i}{2} \cdot (x - x_i)^2 + \frac{1}{6h_{i+1}} \Delta m_i \cdot (x - x_i)^3, \quad i = \overline{0,n-1},$$

где $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $\Delta m_i = m_{i+1} - m_i$, а параметры m_i во внутренних узлах сетки находятся из системы трехдиагонального вида:

$$\frac{h_i}{6} m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} m_i + \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1} = \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1,n-1}.$$

Из условия 5 согласования и стыковки следуют два так называемых краевых условия: $m_0 = 0$; $m_n = 0$. Такие краевые условия называются условиями *натурального сплайна*. Решая систему, можно найти параметры m_i, $i = \overline{0,n}$ и получить уравнения всех звеньев сплайна.