Индивидуальное ДЗ по курсу «Методы оптимизации»
Выполнил студент группы М8О–300Б Иванов И.И.
Вариант №1

Задание:

$$f(X) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2 \to \text{extr}$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1^2 - x_2 \le 2$$

Этап №2. Тема: Методы решения ЗНП при ограничениях типа неравенства

Задание:
а) Сделать чертеж к задаче: построить ограничение, линии уровня функции, указать точки экстремумов.
б) Аналитически отыскать регулярные экстремумы функции при ограничениях типа неравенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий.

№2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА НЕРАВЕНСТВА

Дано: $f(X) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2 \to \text{extr}$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1^2 - x_2 \le 2$$

Задание 2а).

Сделать чертеж к задаче: построить ограничение, линии уровня функции, указать точки экстремумов.

Построим на чертеже множество допустимых решений, задаваемое ограничениями:

$$x_1 + x_2 \le 4 \qquad (1)$$
$$x_1^2 - x_2 \le 2 \qquad (2)$$

Ограничение (1) в задаче определяется прямой $x_1 + x_2 = 4$, проходящей через точки:

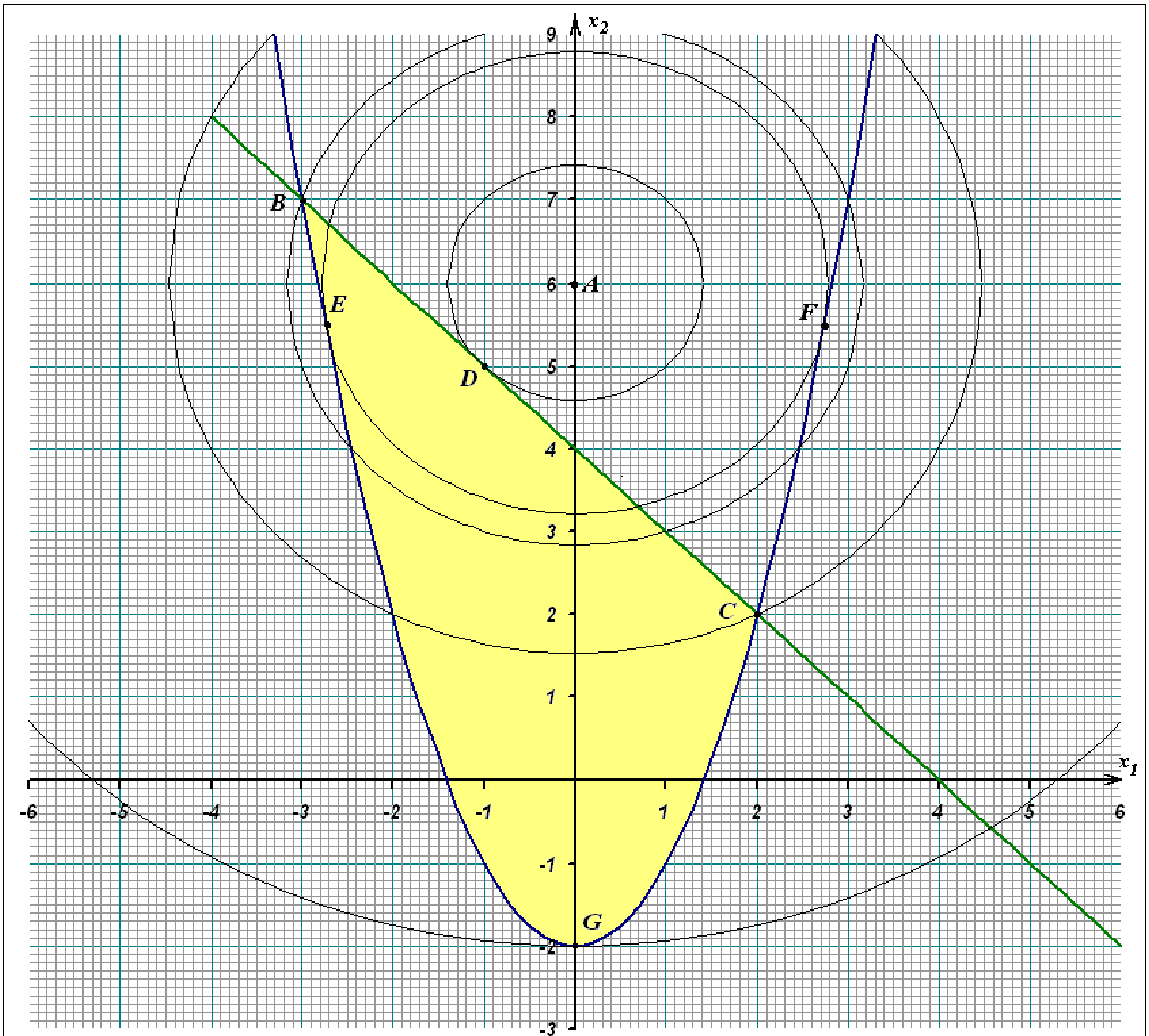
x_1	x_2
0	4
4	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку $(0, 0)^T$, так как при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получается верное неравенство: $0 + 0 \le 4$.

Ограничение (2) в задаче определяется параболой $x_1^2 - x_2 = 2 \;\Rightarrow\; x_2 = x_1^2 - 2$, с вершиной в точке $(0, -2)$. Найдем несколько точек для построения параболы

x_1	x_2
–3	7
–2	2
–1	–1
0	–2
1	–1
2	2
3	7

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой параболой и будет содержать точку $(0,0)^T$, так как при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается верное неравенство: $0^2-0\le 2$.



Запишем уравнение линии линию уровня функции $x_1^2+(x_2-6)^2=C$, это уравнение окружности с центром в точке $(0,6)$ и радиусом $\sqrt{C}$.

Точка $A=(0,6)$, являющаяся безусловным локальным минимумом функции, не принадлежит множеству допустимых решений.

Построим несколько линий уровня при различных значениях C. Отметим на графике точки касания линии уровня и множества допустимых решений: B, D, E, G.

По графику видно, что

- условный локальный минимум в точке $D=(-1,5)$ (точка «внешнего» касания);
- условный локальный максимум в точке $B=(-3,7)$ (точка «внешнего» касания);
- условный локальный максимум в точке $G=(0,-2)$ (точка «внешнего» касания).

В точке E – экстремума нет (точка «внутреннего» касания).

Задание 2б).

Аналитически отыскать регулярные экстремумы функции при ограничениях типа неравенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий.

Преобразуем ограничения к виду: $\varphi_j(X) \le 0$

$$x_1 + x_2 \le 4 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 - 4 \le 0 \;\Rightarrow\; \varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4$$

$$x_1^2 - x_2 \le 2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2 - 2 \le 0 \;\Rightarrow\; \varphi_2(X) = x_1^2 - x_2 - 2$$

> **Внимание!**
>
> Если в постановке задачи ограничение имеет вид $\varphi_j(X) \ge 0$, его необходимо преобразовать: $\underbrace{-\varphi_j(X)}_{\tilde{\varphi}_j(X)} \le 0$, и использовать при составлении функции Лагранжа левую часть преобразованного ограничения.

Запишем классическую функцию Лагранжа:

$$L(X,\lambda) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(x_1^2 - x_2 - 2)$$

Запишем необходимые условия экстремума функции при ограничениях типа неравенства:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 6) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
\lambda_1(x_1 + x_2 - 4) &= 0 \\
\lambda_2(x_1^2 - x_2 - 2) &= 0
\end{aligned}\right\}$$

Решим полученную систему, рассматривая все случаи.

<u>Случай а)</u>

Ограничение $\varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4 < 0$ – пассивно, $\lambda_1 = 0$.

Ограничение $\varphi_2(X) = x_1^2 - x_2 - 2 < 0$ – пассивно, $\lambda_2 = 0$.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений: $\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 6) = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

Т.о. получено первое решение системы – точка А с координатами $A = (0, 6; 0, 0)$. Построим эту точку на чертеже.

<u>Случай б)</u>

Ограничение $\varphi_1(X) = x_1 + x_2 - 4 = 0$ – активно.

Ограничение $\varphi_2(X) = x_1^2 - x_2 - 2 = 0$ – активно.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 6) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ x_1^2 - x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 6) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_2 = -x_1 + 4 \\ x_1^2 - (-x_1 + 4) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 6) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_2 = -x_1 + 4 \\ x_1^2 + x_1 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\ 2(x_2-6)+\lambda_1-\lambda_2=0\\ x_2=-x_1+4\\ x_1=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\ 2(x_2-6)+\lambda_1-\lambda_2=0\\ x_2=7\\ x_1=-3\end{cases}\\ \begin{cases}2x_1+\lambda_1+2\lambda_2x_1=0\\ 2(x_2-6)+\lambda_1-\lambda_2=0\\ x_2=2\\ x_1=2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-6+\lambda_1-6\lambda_2=0\\ 2+\lambda_1-\lambda_2=0\\ x_2=7\\ x_1=-3\end{cases}\\ \begin{cases}4+\lambda_1+4\lambda_2=0\\ -8+\lambda_1-\lambda_2=0\\ x_2=2\\ x_1=2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=7\\ \lambda_1=-3.6\\ \lambda_2=-1.6\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1=2\\ x_2=2\\ \lambda_1=5.6\\ \lambda_2=-2.4\end{cases}}$$

Т.о. получено второе и третье решение системы – точки B, C с координатами соответственно: $B=(-3,7;-3.6,-1.6)$, $C=(2,2;5.6,-2.4)$.

Построим эти точки на чертеже.

<u>Случай в)</u>

Ограничение $\varphi_1(X)=x_1+x_2-4=0$ – активно.

Ограничение $\varphi_2(X)=x_1^2-x_2-2<0$ – пассивно, следовательно $\lambda_2=0$.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}2x_1+\lambda_1=0\\ 2(x_2-6)+\lambda_1=0\\ x_1+x_2-4=0\\ \lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-2x_1\\ 2(x_2-6)-2x_1=0\\ x_1+x_2-4=0\\ \lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-2x_1\\ x_2-x_1=6\\ x_1+x_2=4\\ \lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=5\\ \lambda_1=2\\ \lambda_2=0\end{cases}$$

Т.о. получено четвертое решение системы – точка D с координатами $D=(-1,5;2,0)$. Построим эту точку на чертеже.

<u>Случай г)</u>

Ограничение $\varphi_1(X)=x_1+x_2-4<0$ – пассивно, следовательно $\lambda_1=0$.

Ограничение $\varphi_2(X)=x_1^2-x_2-2=0$ – активно.

Тогда получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}2x_1+2\lambda_2x_1=0\\ 2(x_2-6)-\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\\ x_1^2-x_2-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1(1+\lambda_2)=0\\ 2(x_2-6)-\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\\ x_1^2-x_2-2=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lambda_2=-1\\ 2x_2=11\\ \lambda_1=0\\ x_1^2-x_2-2=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=0\\ 2x_2-\lambda_2=12\\ \lambda_1=0\\ x_2=-2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\pm\sqrt{15/2}\\ x_2=11/2\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=0\\ x_2=-2\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2=-16\end{cases}\end{array}\right.$$

Т.о. получено пятое, шестое и седьмое решение системы – точки E, F, G с координатами соответственно:

$E = (-\sqrt{15/2}, 11/2; 0, -1)$, $F = (\sqrt{15/2}, 11/2; 0, -1)$, $G = (0, -2; 0, -16)$.

Построим эти точки на чертеже.

Выпишем полученные точки:

Точка	**Проверка условий на знак λ_j**		**Проверка точек на принадлежность МДР: $\varphi_1(X) \le 0$ и $\varphi_2(X) \le 0$**	
	Условия	**Вывод**	**Условия**	**Вывод**
$A = (0, 6; 0, 0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$	точка является кандидатом на минимум или максимум	$\varphi_1(A) = 2 > 0$ $\varphi_2(A) = -8 < 0$	точка не принадлежит МДР и отбраковывается
$B = (-3, 7; -3.6, -1.6)$	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	точка является кандидатом на максимум	$\varphi_1(B) = 0$ $\varphi_2(B) = 0$	точка принадлежит МДР
$C = (2, 2; 5.6, -2.4)$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	условия не выполнены, точка отбраковывается	——	——
$D = (-1, 5; 2, 0)$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 = 0$	точка является кандидатом на минимум	$\varphi_1(D) = 0$ $\varphi_2(D) = -6 < 0$	точка принадлежит МДР
$E = (-\sqrt{15/2}, 11/2; 0, -1)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 < 0$	точка является кандидатом на максимум	$\varphi_1(E) = -1.239 < 0$ $\varphi_2(E) = 0$	точка принадлежит МДР
$F = (\sqrt{15/2}, 11/2; 0, -1)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 < 0$	точка является кандидатом на максимум	$\varphi_1(F) = 4.239 > 0$ $\varphi_2(F) = 0$	точка не принадлежит МДР и отбраковывается
$G = (0, -2; 0, -16)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 < 0$	точка является кандидатом на максимум	$\varphi_1(G) = -6 < 0$ $\varphi_2(G) = 0$	точка принадлежит МДР

Таким образом, после отбраковки остались четыре точки:

- $B = (-3, 7; -3.6, -1.6)$ – точка является кандидатом на максимум
- $D = (-1, 5; 2, 0)$ – точка является кандидатом на минимум
- $E = (-\sqrt{15/2}, 11/2; 0, -1)$ – точка является кандидатом на максимум
- $G = (0, -2; 0, -16)$ – точка является кандидатом на максимум

Поверим достаточные условия первого порядка в каждой из полученных точек:

Точка	**Активные ограничения**		**Знак λ_j**	**Вывод**
$B = (-3, 7; -3.6, -1.6)$	$\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = 0$	число активных ограничений равно числу переменных –	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	достаточные условия первого порядка выполнены – <u>точка условный локальный максимум</u>
$D = (-1, 5; 2, 0)$	$\varphi_1 = 0$	число активных ограничений меньше числа переменных – достаточные условия первого порядка не выполнены	——	необходима проверка достаточных условий второго порядка

$E=(-\sqrt{15/2}, 11/2; 0, -1)$	$\varphi_2=0$	число активных ограничений меньше числа переменных – достаточные условия первого порядка не выполнены	_____	необходима проверка достаточных условий второго порядка
$G=(0, -2; 0, -16)$	$\varphi_2=0$	число активных ограничений меньше числа переменных – достаточные условия первого порядка не выполнены	_____	необходима проверка достаточных условий второго порядка

Таким образом, получено: точка $B=(-3,7;-3.6,-1.6)$ – условный локальный максимум функции.

Для оставшихся точек проверим достаточные условия экстремума второго порядка.
Запишем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2+2\lambda_2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2$$

$$\boxed{d^2L=(2+2\lambda_2)(dx_1)^2+2(dx_2)^2}$$

Запишем дифференциал ограничения φ_1:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}=1 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\varphi_1(X)=1\cdot dx_1+1\cdot dx_2}$$

Запишем дифференциал ограничения φ_2:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}=2x_1 \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}=-1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\varphi_2(X)=2x_1\cdot dx_1-1\cdot dx_2}$$

Исследуем точку $\underline{D=(-1,5;2,0)}$ – кандидат на минимум, активным в ней является ограничение φ_1, при этом $\lambda_1=2\neq 0$, тогда:

$$d^2L(D)=2(dx_1)^2+2(dx_2)^2 \text{ при условии } d\varphi_1(D)=1\cdot dx_1+1\cdot dx_2=0,$$

получим:

$$dx_1=-dx_2 \quad \Rightarrow \quad d^2L(D)=4(dx_2)^2>0 \text{ при } dx_2\neq 0.$$

Следовательно, в точке $D=(-1,5;2,0)$ выполнены достаточные условия локального условного минимума.

Исследуем точку $\underline{E=(-\sqrt{15/2}, 11/2; 0, -1)}$ – кандидат на максимум, активным в ней является ограничение φ_2, при этом $\lambda_2=-1\neq 0$, тогда:

$$d^2L(E)=2(dx_2)^2 \text{ при условии } d\varphi_2(E)=-2\sqrt{15/2}\cdot dx_1-1\cdot dx_2=0,$$

получим:

$$dx_2=-2\sqrt{15/2}dx_1 \quad \Rightarrow \quad d^2L(E)=60(dx_1)^2>0 \text{ при } dx_1\neq 0.$$

Т.к. точка является кандидатом на максимум (противоречие), то в точке $E=(-\sqrt{15/2}, 11/2; 0, -1)$ нет экстремума.

Исследуем точку $\underline{G = (0, -2; 0, -16)}$ – кандидат на максимум, активным в ней является ограничение φ_2, при этом $\lambda_2 = -16 \neq 0$, тогда:

$$d^2L(G) = -30(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2 \text{ при условии } d\varphi_2(G) = -1 \cdot dx_2 = 0,$$

получим:

$$dx_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d^2L(G) = -30(dx_1)^2 < 0 \text{ при } dx_1 \neq 0.$$

Следовательно, в точке $G = (0, -2; 0, -16)$ выполнены достаточные условия <u>локального условного максимума</u>.

<u>**Ответ:**</u> функция $f(X)$ при ограничениях $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1^2 - x_2 \leq 2$ имеет:

- условный локальный минимум в точке $D = (-1, 5)$, $f(D) = 1$;
- условный локальный максимум в точке $B = (-3, 7)$, $f(B) = 10$;
- условный локальный максимум в точке $G = (0, -2)$, $f(G) = 64$.