# Лекция № 7

Рассмотрим **Пример 2**.

**Дано:**

$f(X) = x_1^2 + x_2^2 \to extr$

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4$$

Найти решение задачи **методом множителей Лагранжа.**

Здесь ограничение должно быть переписано в виде: $\underbrace{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4}_{\varphi_1(X)} = 0$

**Решение:**

1. Запишем функцию Лагранжа: $L(X,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1((x_1-1)^2 + x_2^2 - 4)$.

2. Запишем необходимые условия экстремума:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1(x_1 - 1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

3. Найдем координаты условно-стационарных точек:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1(x_1-1) = 0 \\ 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1(x_1-1) = 0 \\ 2x_2(1+\lambda_1) = 0 \\ (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1(x_1-1) = 0 \\ x_2 = 0 \\ (x_1-1)^2 - 4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x_1 - 2(x_1-1) = 0 \\ \lambda_1 = -1 \\ (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1(x_1-1) = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - 1 = \pm 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 = 0 \\ \lambda_1 = -1 \\ (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda_1 = -1.5 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda_1 = -0.5 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Получены две точки $A = (3, 0, -1.5)$ и $B = (-1, 0, -0.5)$.

4. Установим тип полученной точки с помощью достаточных условий экстремума.

Составляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2,\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2 \qquad \Rightarrow \boxed{d^2L=(2+2\lambda_1)(dx_1)^2+(2+2\lambda_1)(dx_2)^2}$$

Составляем дифференциал ограничения:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}=2x_1,\qquad \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}=2x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\varphi_1(X)=2x_1dx_1+2x_2dx_2}$$

В точке $A=(3,0,-1.5)$:

$d^2L(A)=-(dx_1)^2-(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(A)=6dx_1=0$,

получим $d^2L(A)=-(dx_2)^2<0$ при $dx_2\neq 0$, следовательно, точка A – условный локальный максимум.

В точке $B=(-1,0,-0.5)$:

$d^2L(B)=(dx_1)^2+(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(B)=-2dx_1=0$,

получим $d^2L(B)=(dx_2)^2>0$ при $dx_2\neq 0$, следовательно, точка B – условный локальный минимум.

**<u>Ответ:</u>** получены точка $A=(3,0), f(A)=9$ – условный локальный максимум и точка $B=(-1,0), f(B)=1$ – условный локальны минимум.

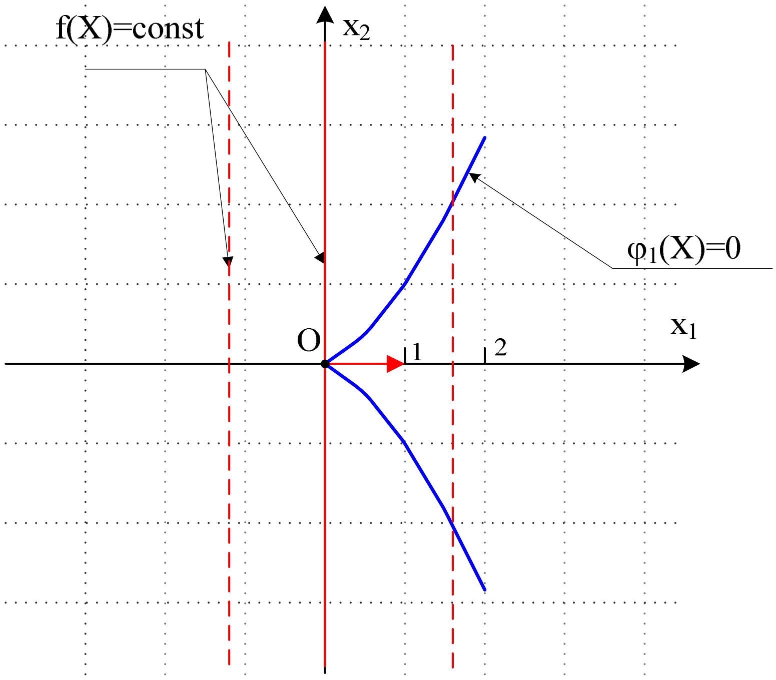
## Метод множителей Лагранжа для случая нерегулярного экстремума

***Пример 3.***

**<u>Дано:</u>**

$f(X)=x_1\to extr$

$x_2^2-x_1^3=0$



Найти решение задачи **<u>методом множителей Лагранжа.</u>**

Здесь ограничение должно быть переписано в виде: $\underbrace{x_2^2 - x_1^3}_{\varphi_1(X)} = 0$

**<u>Решение:</u>**

1. Запишем классическую функцию Лагранжа: $L(X,\lambda) = x_1 + \lambda_1(x_2^2 - x_1^3)$.

2. Запишем необходимые условия экстремума:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1^3 = 0 \end{array}\right\}$$

3. Найдем координаты условно-стационарных точек:

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0 \\ 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ x_2^2 - x_1^3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \{\varnothing, \text{ т.к. } 1 = 0 \\ \{\varnothing, \text{ т.к. } 1 = 0 \end{array}\right.$$

Данная система не имеет решения, хотя из чертежа видно, что в точке $O = (0, 0)$ функция имеет условный минимум.

Вычислим градиент ограничения в точке $O = (0, 0)$: $\nabla\varphi_1(X) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla\varphi_1(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно, точка $O = (0, 0)$ – является точкой нерегулярного экстремума.

Чтобы избежать подобного результата при применении необходимых условий экстремума используют <u>*обобщенную функцию Лагранжа*</u> вида: $L(X, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(X)$.

**Теорема о необходимых условиях экстремума** в этом случае формулируется так.

Пусть $X^*$ есть точка локального условного экстремума в задаче, то найдутся такие $\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*$, не равные нулю одновременно, что:

- $\dfrac{\partial L(X^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,..,n;$ (условие стационарности функции Лагранжа по $X$),
- $\varphi_j(X^*) = 0, \quad j = 1,..,m$ (условие допустимости решения).

Если при этом, если $X^*$ – точка регулярного экстремума, то $\lambda_0^* \neq 0$.

**Замечание.** В точках нерегулярного экстремума достаточные условия не проверяются.

Рассмотрим решение **Примера 3** с использованием обобщенной функции Лагранжа.

1. Запишем обобщенную функцию Лагранжа: $L(X,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 x_1+\lambda_1(x_2^2-x_1^3)$.

2. Запишем необходимые условия экстремума:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x_1}=\lambda_0-3\lambda_1 x_1^2=0\\&\frac{\partial L}{\partial x_2}=2\lambda_1 x_2=0\\&x_2^2-x_1^3=0\end{aligned}\right\}$$

3. Найдем координаты условно-стационарных точек.

$$\begin{cases}\lambda_0-3\lambda_1 x_1^2=0\\2\lambda_1 x_2=0\\x_2^2-x_1^3=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lambda_0=0\\\lambda_1=0\\x_2^2-x_1^3=0\end{cases}\\\begin{cases}\lambda_0=0\\x_2=0\\x_1=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\{\varnothing,\ \text{т.к. все множители } \lambda \text{ не могут быть равны } 0.\\\begin{cases}\lambda_0^*=0\\x_2^*=0\\x_1^*=0\\\lambda_1^*\neq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

**Ответ:** Получена точка $O=(0,0)$, $f(O)=0$ – условно-стационарная точка функции.

## (4) Метод штрафной функции

Метод штрафной функции относится к численным методам решения задачи поиска условного экстремума.
Метод штрафной функции предусматривает поиск условного экстремума в результате решения последовательности задач безусловной минимизации вида:

$$F(X,r_k)=f(X)+\Phi(X,r_k)\to\min_{X\in R^n}, \qquad ***$$

здесь $F(X,r_k)$ – вспомогательная функция;

$\Phi(X,r_k)$ – штрафная функция;

$r_k>0$ – штрафной параметр, при решении каждой задачи *** фиксируется.

Штрафная функция конструируется из условия:

$$\Phi(X,r_k)=\begin{cases}=0, & \varphi_j(X)=0\\>0, & \varphi_j(X)\neq 0\end{cases},$$

причем, чем больше $|\varphi_j(X)|$, тем больше штрафная функция. Кроме того, штраф должен быть таким, чтобы при $r_k\to\infty$ штрафная функция $\Phi(X,r_k)\to\infty$ при невыполнении ограничений, т.е. становился тем больше, чем больше не выполняются ограничения.

Обычно, в качестве штрафной используют функцию вида: $\Phi(X, r_k) = \frac{r_k}{2} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^2(X)$.

**Алгоритм численного решения задачи методом штрафной функции:**

1. Задать начальную точку $X^0$ и начальное значение параметра $r_0$ (обычно $r_0 = 1$). Задать число $C > 1$ для увеличения штрафного параметра (обычно $C = 10$). Задать $\varepsilon > 0$. Положить $k = 0$.

2. Записать вспомогательную функцию: $F(X, r_k) = f(X) + \frac{r_k}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^2(X)$.

3. Найти $X^*(r_k)$ – безусловный минимум функции $F(X, r_k)$ по $X$ с помощью какого-либо численного метода безусловной минимизации (обычно используют метод градиентного спуска) из начальной точки $X^k$.

4. Проверить условие окончания счета $\Phi(X, r_k) < \varepsilon$.

Если условие выполнено, то $X^* = X^*(r_k)$, решение задачи закончено.
Если условие не выполнено, то положить

$X^{k+1} = X^*(r_k)$,

$r_{k+1} = r_k \cdot C$,

$k = k + 1$

и перейти к шагу 2.

Доказано, что при $r_k \to \infty$, последовательность получаемых точек $\{X^*(r_k)\}$ стремится к $X^*$:

$$\lim_{r_k \to \infty} X^*(r_k) = X^*.$$

**Замечание.** Так как сходимость метода обеспечивается при $r_k \to \infty$, то возникает вопрос о том, нельзя ли получить решение исходной задачи в результате однократного поиска безусловного минимума вспомогательной функции с параметром $r_k$, равным большому числу, например $r_k = 10^{20}$. Такая замена решения последовательности задач поиска безусловного минимума не представляется возможной, так как с ростом $r_k$ вспомогательная функция приобретает все более «овражный» характер, и сходимость методов, используемых на шаге 3 значительно падает.

Существует связь между значением параметра штрафа $r_k$ и множителями Лагранжа:

$$\lambda_j(r_k) = r_k \cdot \varphi_j(X(r_k)),$$

$$\lambda_j^* = \lim_{r_k \to \infty} \lambda_j(r_k).$$

**Замечание.** В случае поиска условного экстремума квадратичной функции при линейном ограничении задача *** может быть решена аналитически.

**Алгоритм аналитического решения задачи методом штрафной функции:**

1. Записать вспомогательную функцию: $F(X,r) = f(X) + \frac{r}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^2(X)$
2. Записать необходимые условия экстремума для вспомогательной функции:
$$\left\{ \frac{\partial F(X,r)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1..n \right.$$
3. Найти решение полученной системы: $X^*(r)$. Решение системы зависит от параметра $r$.
4. Найти условно-стационарную точку в задаче: $X^* = \lim\limits_{r \to \infty} X^*(r)$.
5. Составить матрицу Гессе для вспомогательной функции: $H(X^*(r)) = \left( \frac{\partial^2 F(X,r)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$
6. Исследовать знакоопределенность матрицы при $r \to \infty$ по критерию Сильвестра.
7. Записать оценку множителей Лагранжа: $\lambda_j^* = \lim\limits_{r \to \infty} r \cdot \varphi_j(X^*(r)) \quad j = 1..m$.

**Замечание.**
В случае поиска максимума, используют вспомогательную функцию вида:
$$F(X,r) = f(X) - \frac{r}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^2(X),$$
и оценку множителей Лагранжа вычисляют по формуле: $\lambda_j^* = -\lim\limits_{r \to \infty} r \cdot \varphi_j(X^*(r)) \quad j = 1..m$.

Рассмотрим **Пример 1**.

**Дано:**
$f(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to extr$
$2x_1 + x_2 = 4$
Найти решение задачи **методом штрафной функции.**
Здесь ограничение должно быть переписано в виде: $\underbrace{2x_1 + x_2 - 4}_{\varphi_1(X)} = 0$

**Решение:**

1. Запишем штрафную функцию: $F(X,r) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + \frac{r}{2}(2x_1 + x_2 - 4)^2$
2. Запишем необходимые условия экстремума.
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(X,r)}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 3) + 2r(2x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ \frac{\partial F(X,r)}{\partial x_1} &= 2(x_2 - 4) + r(2x_1 + x_2 - 4) = 0 \end{aligned} \right\}$$

3. Найдем координаты стационарных точек штрафной функции:

$$\begin{cases}(2+4r)x_1 + 2r\cdot x_2 = 6+8r \\ 2r\cdot x_1 + (2+r)x_2 = 8+4r\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+4r & 2r \\ 2r & 2+r \end{vmatrix} = 4+10r,\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6+8r & 2r \\ 8+4r & 2+r \end{vmatrix} = 12+6r,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+4r & 6+8r \\ 2r & 8+4r \end{vmatrix} = 16+28r$$

Окончательно:

$$\begin{cases}(2+4r)x_1 + 2r\cdot x_2 = 6+8r \\ 2r\cdot x_1 + (2+r)x_2 = 8+4r\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{12+6r}{4+10r} \\ x_2^* = \dfrac{16+28r}{4+10r}\end{cases}$$

Получена условно-стационарная точка $X^*(r) = \left(\dfrac{12+6r}{4+10r}, \dfrac{16+28r}{4+10r}\right)$

4. Найдем координаты условно-стационарных точек:

$x_1^* = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{12+6r}{4+10r} = 0.6$, $x_2^* = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{16+28r}{4+10r} = 2.8$, следовательно, получена условно-стационарная точка $A = (0.6, 2.8)$

5. Составим матрицу Гессе для штрафной функции: $H(X^*(r)) = \begin{pmatrix} 2+4r & 2r \\ 2r & 2+r \end{pmatrix}$

6. По критерию Сильвестра: $\Delta_1 = 2+4r > 0$ при $r\to\infty$

$\Delta_2 = 4+10r > 0$ при $r \to \infty$,

значит матрица $H(X^*(r)) > 0$ и точка $A = (0.6, 2.8)$ – условный минимум.

7. Запишем оценку множителя Лагранжа:

$$\lambda_1 = \lim_{r\to\infty} r\cdot\left(\frac{2(12+6r)}{4+10r} + \frac{16+28r}{4+10r} - 4\right) = \lim_{r\to\infty} r\cdot\left(\frac{40+40r-4\cdot(4+10r)}{4+10r}\right) = \lim_{r\to\infty} r\cdot\left(\frac{24}{4+10r}\right) = 2.4$$

**<u>Ответ:</u>** получена точка $A = (0.6, 2.8), f(A) = 7.2 -$ условный локальный минимум.