Лекция № 6

Задача нелинейного программирования при ограничениях типа равенств

Постановка задачи:

Решается задача: $f(X) \to \underset{X \in \boldsymbol{X}}{\text{extr}}$ *

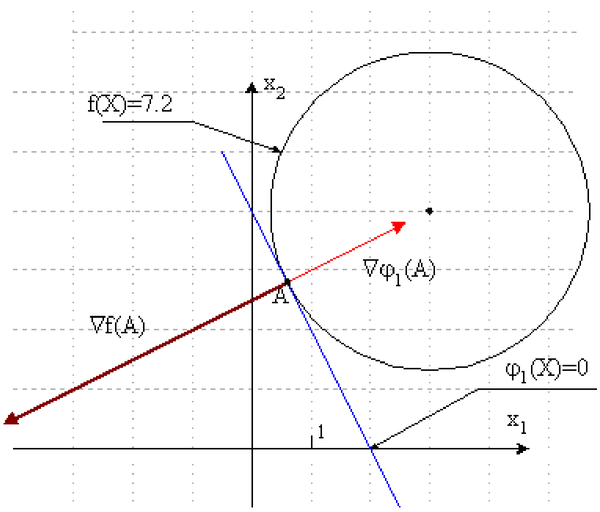
$$\boldsymbol{X} = \{X : \varphi_j(X) = 0, j = 1..m \le n\}$$

Особенностью решения задачи является то, что допустимые решения, на которых ищется экстремум функции, являются решениями системы алгебраических уравнений $\varphi_j(X) = 0, \quad j = 1..m$, число которых не превышает число переменных функции.

В случае функции двух переменных искомые экстремумы графически следует искать среди точек касания линии уровня функции $f(X) = C$ и ограничения $\varphi_1(X) = 0$.

Пример 1.

$$f(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \text{extr}$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$

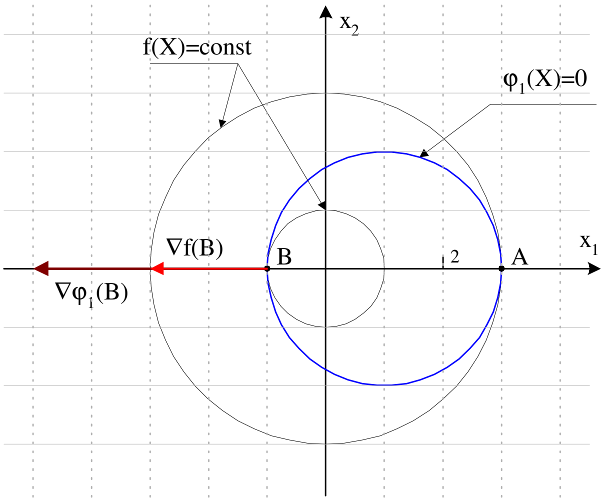


$$\nabla f(A) = \begin{pmatrix} -4.8 \\ -2.4 \end{pmatrix} \quad \nabla\varphi_1(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь точка $A = (0.6, 2.8)^T$ – условный минимум.

Пример 2.

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr}$$
$$\underbrace{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4}_{\varphi_1(X)} = 0$$



$$\nabla f(B) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla\varphi_1(B) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Здесь точка $A = (3, 0)^T$ – условный максимум,

точка $B = (-1, 0)^T$ – условный минимум

Как видно из чертежа, точки касания обладают следующими свойствами:

- точка касания принадлежит ограничению, т.е. $\varphi_1(X^{Кас}) = 0$;
- градиенты функции и ограничения в точке касания являются линейно-зависимыми, т.е. $\nabla f(X^{Кас}) = \alpha \cdot \nabla\varphi_1(X^{Кас})$, где $\alpha = const$.

(1) Графическое решение задачи

Алгоритм графического решения задачи

1. Построить график ограничения $\varphi_1(X) = 0$ и определить множество допустимых решений ***X***

2. Вычислить точку касания, пользуясь условиями касания.

3. Вычислить функцию в точке касания, записать уравнение линии уровня в точке касания. Определить тип и построить линию уровня на чертеже.

Рассмотрим **Пример 1**.

Дано:

$$f(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to extr$$

$$2x_1 + x_2 = 4$$

Найти решение задачи **графически.**

Здесь ограничение должно быть переписано в виде: $\underbrace{2x_1 + x_2 - 4}_{\varphi_1(X)} = 0$

Решение:

1. Т.к. решение задачи – это точка касания ограничения и линии уровня функции, запишем условия касания:

- Искомая точка должна принадлежать ограничению: $2x_1 + x_2 = 4$
- Градиенты ограничения и функции в точке касания должны быть линейно-зависимыми:

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(X) &= \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2(x_2-4) \end{pmatrix} \\ \nabla\varphi_1(X) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2(x_2-4) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2(x_1-3)}{2} = \frac{2(x_2-4)}{1}$$

Т.о. получены два условия:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 3 = 2x_2 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 5x_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0.6 \\ x_2^* = 2.8 \end{cases}$$

Получена точка $A = (0.6, 2.8)$.

2. Ограничение в задаче $2x_1 + x_2 = 4$ – это прямая проходящая через точки:

x_1	x_2
0	4
2	0

Построим прямую на чертеже.

3. Найдем уравнение линии уровня в точке касания.

Значение функции в точке касания: $f(A) = (0.6-3)^2 + (2.8-4)^2 = 7.2$

Тогда уравнение линии уровня имеет вид: $(x_1-3)^2 + (x_1-4)^2 = 7.2$ – это уравнение окружности с центром в точке $(3, 4)$ и радиусом $\sqrt{7.2}$

Построим окружность на чертеже.

<u>Ответ:</u> получена точка $A = (0.6, 2.8), f(A) = 7.2$ – экстремум в задаче.

Если система ограничений $\varphi_j(X) = 0, \quad j = 1..m$ разрешима относительно любых m переменных, то решение задачи может быть получено методом исключений.

(2) Метод исключений

Допустим, что система ограничений $\varphi_j(X) = 0, \quad j = 1..m$ может быть разрешена относительно некоторых m переменных:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \psi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \\
&x_2 = \psi_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \\
&x_3 = \psi_3(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \qquad ** \\
&..... \\
&x_m = \psi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)
\end{aligned}
$$

тогда можно утверждать, что переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ являются независимыми (свободными для выбора), а это означает, что решение задачи * может быть сведено к решению задачи на безусловный экстремум.

<u>Алгоритм решения задачи методом исключений:</u>

1. Разрешить систему ограничений относительно любых m переменных.

2. Подставить полученные выражения в исходную функцию и перейти к задаче безусловной оптимизации:

$$
\begin{aligned}
&f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) = \\
&= f(\psi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), \psi_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), ..., x_{m+1}, ..., x_n) == \tilde{f}(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \to extr
\end{aligned}
$$

3. Решить полученную задачу безусловной оптимизации – найти стационарные точки и проверить достаточные условия экстремума в них.

4. Вернуться к исходной задаче и, используя решение задачи безусловной оптимизации, найти значения недостающих переменных **.

Рассмотрим **Пример 1**.

Дано:

$$f(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to extr$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$

Найти решение задачи **методом исключений**:

Решение:

1. Выразим одну из переменных из ограничения: $x_2 = 4 - 2x_1$.
2. Подставим полученное выражение в функцию: $f(X) = (x_1 - 3)^2 + (4 - 2x_1 - 4)^2 = \tilde{f}(x_1) \to extr$.

3. Найдем экстремум полученной функции:

$$\tilde{f}(x_1) = 9 - 6x_1 + 5x_1^2 \to extr$$

$$\frac{d\tilde{f}}{dx_1} = -6 + 10x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0.6$$

$$\frac{d^2\tilde{f}}{d(x_1)^2} = 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad \min$$

4. Найдем значение оставшейся переменной: $x_2^* = 4 - 2x_1^* = 4 - 1.2 = 2.8$.

Ответ: получена точка $A = (0.6, 2.8)$, $f(A) = 7.2$ – условный локальный минимум.

Возможности применения метода исключения ограничены тем, что система ограничений в большинстве задач носит нелинейный характер, а, следовательно, неразрешима относительно нужного числа переменных.

Определение 1.

Точка X^*, являющаяся точкой условного экстремума в задаче *, называется точкой *регулярного* условного экстремума, если градиенты ограничений $\nabla\varphi_j(X^*)$, $j=1..m$ являются линейно-независимыми.

Если задача включает только одно ограничение, то если $\nabla\varphi_1(X^*)\neq 0$, то X^* – точка регулярного условного экстремума, если $\nabla\varphi_1(X^*)=0$, то X^* – точка нерегулярного условного экстремума.

Определение 2.

Функция $L(X,\lambda)=f(X)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(X)$ называется *классической функцией Лагранжа*.

Функция $L(X,\lambda)$ зависит от $n+m$ переменных: n штук x_i и m штук λ_j – называемых *множителями Лагранжа*.

Определение 3.

Вторым дифференциалом функции Лагранжа называется функция:

$$d^2L(X,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j$$

Определение 4.

Первым дифференциалом ограничения $\varphi_j(X)$ называется функция: $d\varphi_j(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j(X)}{\partial x_i}dx_i$.

(3) Метод множителей Лагранжа (аппарат необходимых и достаточных условий)

Теорема 1. (о необходимых условиях регулярного экстремума)

Пусть X^* есть точка регулярного локального условного экстремума в задаче *, и при этом $\nabla\varphi_j(X^*)$, $j=1..m$ являются линейно-независимыми, то найдутся такие λ_j^*, что:

- $\frac{\partial L(X^*,\lambda^*)}{\partial x_i}=0,\quad i=1..n$ (условие стационарности функции Лагранжа по X),
- $\varphi_j(X^*)=0,\quad j=1..m$ (условие допустимости решения).

Теорема 2. (о достаточных условиях регулярного экстремума)

Если в точке (X^*,λ^*) выполняются необходимые условия экстремума и $d^2L(X^*,\lambda^*)>0$ при всех ненулевых dx_i, таких, что $d\varphi_j(X^*)=0,\quad j=1..m$, то X^* – точка условного локального минимума функции, если же при всех тех же условиях $d^2L(X^*,\lambda^*)<0$, то X^* – точка условного локального максимума функции.

Алгоритм решения задачи методом множителей Лагранжа:

1. Записать классическую функцию Лагранжа: $L(X,\lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(X)$.

2. Записать необходимые условия экстремума ФМП при ограничениях типа равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial \varphi_j(X)}{\partial x_i} = 0, & i = 1..n \\ \varphi_j(X) = 0, & j = 1..m \end{cases}$$

3. Решить полученную систему. Решение системы – условно-стационарные точки (X^*, λ^*).

4. Проверить достаточные условия экстремума в каждой точке (X^*, λ^*), для этого

Записать второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$.

Записать дифференциалы ограничений $d\varphi_j(X) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_j(X)}{\partial x_i} dx_i$.

В каждой точке (X^*, λ^*):

4.1. Вычислить второй дифференциал $d^2L(X^*, \lambda^*)$.

4.2. Записать условия равенства 0 дифференциалов ограничений в каждой точке X^*:

$$d\varphi_j(X^*) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_{X^*} \cdot dx_i = 0, \quad j = 1..m$$

4.3. Используя уравнения из п. 4.2, выразить любые m дифференциалов переменных через оставшиеся $(n-m)$ и подставить их в выражение для $d^2L(X^*, \lambda^*)$.

4.4. Определить знак $d^2L(X^*, \lambda^*)$:

- если $d^2L(X^*, \lambda^*) > 0$ при $dx_i \neq 0$, то точка X^* – точка условного локального минимума в задаче;
- если $d^2L(X^*, \lambda^*) < 0$ при $dx_i \neq 0$, то точка X^* – точка условного локального максимума в задаче.

Рассмотрим **Пример 1**.

Дано:

$f(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \text{extr}$

$2x_1 + x_2 = 4$

Найти решение задачи **методом множителей Лагранжа.**

Здесь ограничение должно быть переписано в виде: $\underbrace{2x_1 + x_2 - 4}_{\varphi_1(X)} = 0$

Решение:

1. Запишем функцию Лагранжа: $L(X,\lambda) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 4)$.

2. Запишем необходимые условия экстремума:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 3) + 2\lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_2 - 4) + \lambda_1 = 0 \\ \quad 2x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

3. Найдем координаты условно-стационарных точек:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 = 6 \\ 2x_2 + \lambda_1 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = -5 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0.6 \\ x_2^* = 2.8 \\ \lambda_1^* = 2.4 \end{cases}$$

Получена условно-стационарная точка $A = (0.6,\ 2.8,\ 2.4)$.

4. Установим тип полученной точки с помощью достаточных условий экстремума.

Составляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d^2L(X,\lambda) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2}.$$

Составляем дифференциал ограничения:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 2, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\varphi_1(X) = 2dx_1 + dx_2}.$$

В точке $A = (0.6,\ 2.8,\ -2.4)$ имеем:

$d^2L(A) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(A) = 2dx_1 + dx_2 = 0$.

Значит $dx_2 = -2dx_1$, тогда получим $d^2L(A) = 10(dx_1)^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$, следовательно точка A – условный локальный минимум.

Ответ: получена точка $A = (0.6,\ 2.8)$, $f(A) = 7.2$ – условный локальный минимум.