Лекция № 9

Метод множителей Лагранжа для случая нерегулярного экстремума

Как и в случае задачи нелинейного программирования при ограничениях типа равенства точки экстремума в задаче нелинейного программирования при ограничениях типа неравенства могут быть нерегулярными.

Определение 1.
Точка X^*, являющаяся точкой условного экстремума в задаче нелинейного программирования при ограничениях типа неравенства, называется точкой *регулярного* условного экстремума, если градиенты активных ограничений $\nabla\varphi_j(X^*),\quad j=1..m$ в ней являются линейно-независимыми.

Если в точке X^* активно только одно ограничение $\varphi_k(X)$, и $\nabla\varphi_k(X^*)\neq 0$, то X^* – точка регулярного условного экстремума, если $\nabla\varphi_k(X^*)=0$, то X^* – точка нерегулярного условного экстремума.

В случае нерегулярного экстремума используют *обобщенную функцию Лагранжа* вида:

$$L(X,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f(X)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(X).$$

Теорема о необходимых условиях экстремума (обобщенная формулировка)

Пусть X^* есть точка локального условного минимума (максимума) в задаче, то найдутся такие $\lambda_0^*,\lambda_1^*,...,\lambda_m^*$, не равные нулю одновременно, что:

- $\dfrac{\partial L(X^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i}=0,\quad i=1,..,n;$ (условие стационарности функции Лагранжа по X),
- $\lambda_j\cdot\varphi_j(X^*)=0,\quad j=1..m$ (***условие дополняющей нежесткости***);
- $\lambda_j\geq 0,\quad j=1..m$ (условие на знак множителей Лагранжа для условного минимума)

  или

  $\lambda_j\leq 0,\quad j=1..m$ (условие на знак множителей Лагранжа для условного максимума);
- $\varphi_j(X^*)\leq 0\quad j=1..m$ (условие допустимости решения).

Если при этом, если X^* – точка регулярного экстремума, то $\lambda_0^*\neq 0$.

Замечание. В точках нерегулярного экстремума достаточные условия не проверяются.

Метод внешних штрафов

Метод внешних штрафов относится к численным методам решения задачи нелинейного программирования при ограничениях типа неравенства.

Также как и в случае задачи нелинейного программирования при ограничениях типа равенства метод внешних штрафов предусматривает поиск условного экстремума в результате решения последовательности задач безусловной минимизации вида:

$$F(X, r_k) = f(X) + \Phi(X, r_k) \to \min_{X \in R^n},$$

здесь $F(X, r_k)$ – вспомогательная функция;

$\Phi(X, r_k)$ – штрафная функция;

$r_k > 0$ – штрафной параметр, при решении каждой задачи фиксируется.

В качестве штрафной используют функцию вида: $\Phi(X, r_k) = \dfrac{r_k}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} [\varphi_j^+(X)]^2$, где

$$\varphi_j^+(X) = \max\{0, \varphi_j(X)\} = \begin{cases} \varphi_j(X), & \varphi_j(X) > 0, \\ 0, & \varphi_j(X) \le 0 \end{cases}$$ – функция срезки.

<u>Алгоритм численного решения задачи методом внешних штрафов:</u>

1. Задать начальную точку X^0 и начальное значение параметра r_0 (обычно $r_0 = 1$). Задать число $C > 1$ для увеличения штрафного параметра (обычно $C = 10$). Задать $\varepsilon > 0$. Положить $k = 0$.

2. Записать вспомогательную функцию: $F(X, r_k) = f(X) + \dfrac{r_k}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} [\varphi_j^+(X)]^2$.

3. Найти $X^*(r_k)$ – безусловный минимум функции $F(X, r_k)$ по X с помощью какого-либо численного метода безусловной минимизации (обычно используют метод градиентного спуска) из начальной точки X^k.

4. Проверить условие окончания счета $\Phi(X, r_k) < \varepsilon$.

Если условие выполнено, то $X^* = X^*(r_k)$, решение задачи закончено.

Если условие не выполнено, то положить

$X^{k+1} = X^*(r_k)$,

$r_{k+1} = r_k \cdot C$,

$k = k + 1$

и перейти к шагу 2.

Доказано, что при $r_k \to \infty$, последовательность получаемых точек $\{X^*(r_k)\}$ стремится к X^*:

$$\lim_{r_k \to \infty} X^*(r_k) = X^*.$$

Примеры практических задач нелинейного программирования при наличии ограничений

Задачи об инвестиционном портфеле

Совокупность купленных инвестором активов называется портфелем, он задается вектором относительных весов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, где $x_i = \frac{Z_i V_i}{W}$, Z_i – количество единиц каждого актива a_i; V_i – начальная цена единицы актива a_i; W – начальный инвестируемый капитал. Так как относительный вес определяется отношением стоимости актива данного вида $W_i = Z_i V_i$ к общей стоимости портфеля W то он неотрицательный $x_i \geq 0$.

Предполагается, что справедливо условие $W = \sum_{i=1}^{n} Z_i V_i$, тогда выполняется ограничение на вектор, описывающий портфель: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Доходность каждого актива считается случайной величиной, поэтому поведение активов описывается следующими статистическими характеристиками:

- вектором математических ожиданий $m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$, где m_i – математическое ожидание доходности R_{a_i} актива a_i;
- ковариационной матрицей доходностей $C = \begin{pmatrix} c_{11} & ..... & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & ..... & c_{nn} \end{pmatrix}$, где $c_{ij} = \mathrm{cov}(R_{a_i}, R_{a_j})$. Она описывает связь активов между собой, является симметрической неотрицательно определенной матрицей.

Портфель характеризуется двумя показателями: ***доходностью*** $E = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ и ***риском*** $V = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$.

Рассмотрим **математические постановки типовых** задач об инвестициях в ценные бумаги.

<u>Задача о нахождении портфеля с минимальным риском</u>

Целевая функция, отражающая риск:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \to \min$$

Ограничение в задаче:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

.

Задача о нахождении портфеля с минимальным риском среди всех портфелей с заданным уровнем доходности E

Целевая функция, отражающая риск:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \to \min$$

Ограничение в задаче:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = D.$$

Задача о нахождении портфеля с максимальным уровнем доходности и заданным уровнем риска V

Целевая функция, отражающая доходность:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \to \max$$

Ограничение в задаче:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j = R.$$

Полученные модели – модели задачи нелинейного программирования при ограничениях типа равенства. Решением задачи являются значения относительных весов x_i.

Задача о нахождении объема производства

Фирма производит два вида продукции и считает, что связь между объемом производимой продукции x_i и ценой y_i продукции i-го вида может быть представлена в виде уравнений:

$$x_1 = p_1 \cdot y_1 + q_1;$$

$$x_2 = p_2 \cdot y_2 + q_2.$$

При производстве продукции применяются два вида сырья, при этом на производство единицы продукции первого вида используют a_{11} и a_{12} единиц сырья первого и второго видов, а на производство единицы продукции второго вида – a_{21} и a_{22} единиц сырья первого и второго видов соответственно. Запасы сырья первого и второго видов ограничены величинами b_1 и b_2 единиц соответственно.

Требуется найти оптимальные величины объема производимой продукции обоих видов, определяемые спросом, и цены на них из условия получения максимального дохода от реализации.

Математическая модель задачи

Целевая функция, отражающая величину суммарного дохода от реализации:

$$f(X) = y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 \to \max$$

Ограничения в задаче:

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \le b_1$ – ограничение на запасы сырья первого вида;

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \le b_2$ – ограничение на запасы сырья второго вида;

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ – ограничение на неотрицательность объемов производимой продукции;

$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0$ – ограничение на неотрицательность цен.

Используя уравнения связи $x_1 = p_1 \cdot y_1 + q_1$, $x_2 = p_2 \cdot y_2 + q_2$, исключим из целевой функции и ограничений переменные x_j:

$$f(X) = p_1 \cdot y_1^2 + p_2 \cdot y_2^2 + q_1 \cdot y_1 + q_2 \cdot y_2 \to \max$$

$$a_{11}p_1 \cdot y_1 + a_{12}p_2 \cdot y_2 \le b_1 - a_{11}q_1 - a_{12}q_2$$

$$a_{21}p_1 \cdot y_1 + a_{22}p_2 \cdot y_2 \le b_2 - a_{21}q_1 - a_{22}q_2$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0$$

Полученная модель – модель задачи нелинейного программирования при ограничениях типа неравенства. Решением задачи являются цены y_i, значения x_i объемов производимой продукции находятся из уравнений связи.

Задача о поиске объекта в заданной области

В заданном районе ведется поиск пропавшего объекта.

Предположим, что область поиска разбита на районы $S_1, S_2, ..., S_n$, и что априори известны вероятности p_i нахождения объекта в районе S_i:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad p_i \ge 0, \; i = 1, ..., n.$$

Обозначим через w_i нормализованные поисковые усилия, которые должны быть затрачены в районах $S_1, S_2, ..., S_n$ и удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad w_i \ge 0, \; i = 1, ..., n.$$

Если объект находится в районе S_i, то вероятность его обнаружения можно выразить формулой, $1 - a_i \cdot e^{-r \cdot w_i}$, где $a_i > 0, r > 0$ – заданы.

Тогда вероятность обнаружения объекта в области поиска равна $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(1 - a_i \cdot e^{-r \cdot w_i}\right)$.

Требуется максимизировать вероятность обнаружения объекта в области поиска.

Математическая модель задачи

Целевая функция, отражающая вероятность обнаружения объекта в области поиска:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(1 - a_i \cdot e^{-r \cdot w_i}\right) \to \max$$

Ограничения в задаче:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i \ge 0,\ \ i = 1,\dots,n.$$

Полученная модель – модель задачи нелинейного программирования при смешанных ограничениях. Решением задачи являются w_i нормализованные поисковые усилия.