Лекция № 8

Задача нелинейного программирования при ограничениях типа неравенства

Постановка задачи:

Решается задача: $f(X) \to \underset{X \in \boldsymbol{X}}{\text{extr}}$ *

$$\boldsymbol{X} = \{X : \varphi_j(X) \le 0, j = 1..m\}$$

Особенностью задачи является то, что решение может находиться как внутри множества допустимых решений, так и на его границе.

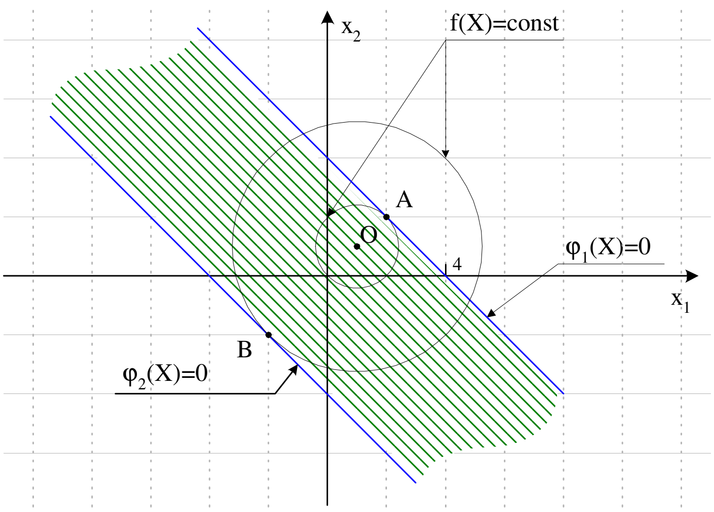
Первый случай имеет место, если безусловный экстремум функции оказывается внутри множества допустимых решений.

Второй случай, соответствует ситуации, когда безусловный экстремум функции находится вне множества допустимых решений, тогда решение задачи оказывается на границе множества допустимых решений.

В случае функции 2-х переменных графически точки экстремума, соответствующие 2-му случаю, представляют собой точки «внешнего» касания линии уровня функции и множества допустимых решений.
Точка «внешнего» касания характеризуется тем, что линия уровня функции, построенная в такой точке, в локальной окрестности находится снаружи множества допустимых решений (имеет только одну общую точку с множеством допустимых решений). Точка «внутреннего» касания характеризуется тем, что линия уровня функции, построенная в такой точке, в локальной окрестности находится внутри множества допустимых решений.

Пример №1

$$f(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \text{extr}$$
$$x_1 + x_2 - 4 \le 0$$
$$-x_1 - x_2 - 4 \le 0$$



Условный локальный минимум в точке $O = (1, 1)$ (совпадает с безусловным минимумом).

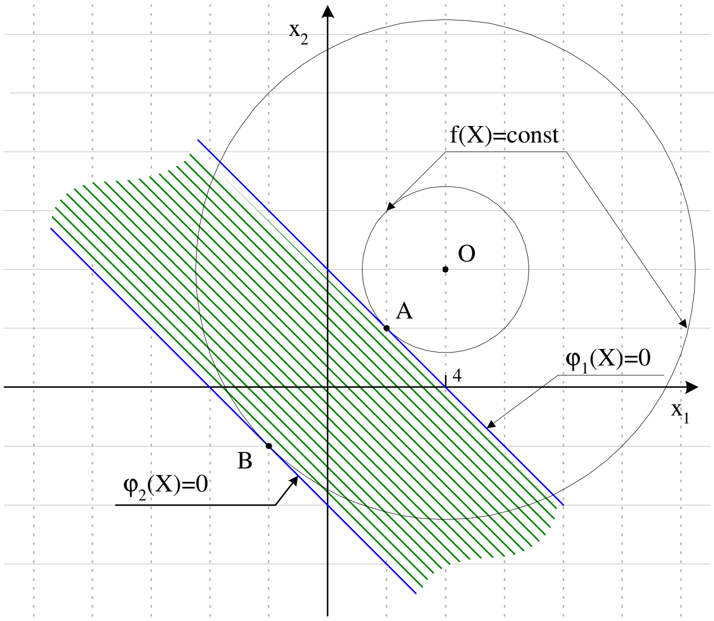
В точках A и B – экстремума нет (точки «внутреннего» касания).

Пример №2

$$f(X) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to extr$$
$$x_1 + x_2 - 4 \le 0$$
$$-x_1 - x_2 - 4 \le 0$$

Условный локальный минимум в точке $A = (2, 2)$ (точка «внешнего» касания).

В точке B – экстремума нет (точка «внутреннего» касания).

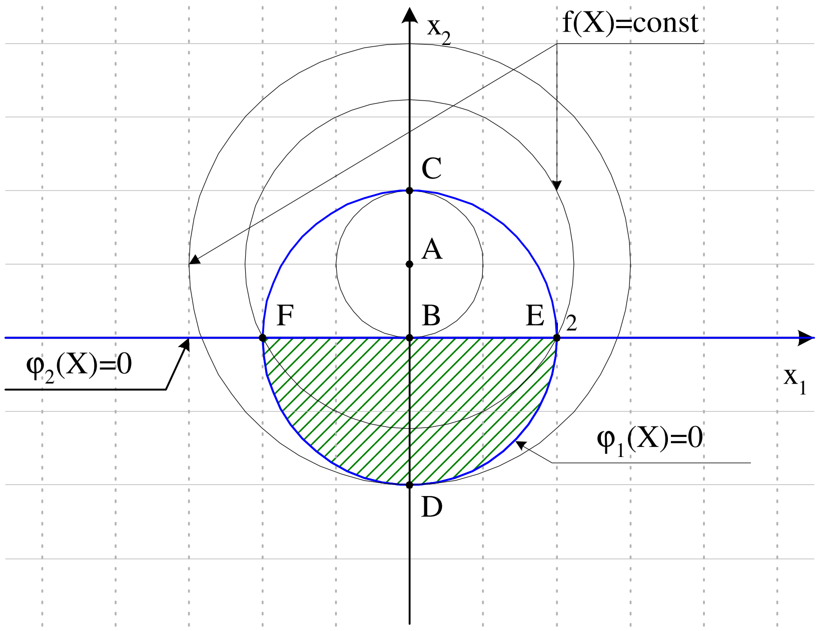


Пример №3

$$f(X) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \to extr$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 4$$
$$x_2 \le 0$$

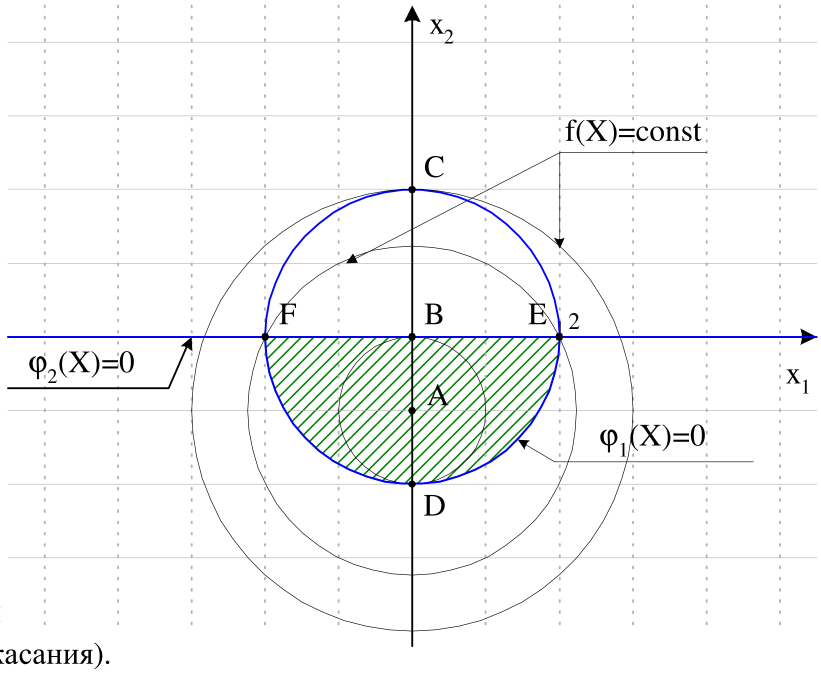
Условный локальный минимум в точке $B = (0, 0)$ (точка «внешнего» касания).

Условный локальный максимум в точке $D = (0, -2)$ (точка «внешнего» касания).



Пример №4

$$f(X) = x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \to extr$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 4$$
$$x_2 \le 0$$



Условный локальный минимум в точке $A = (0, -1)$ (совпадает с безусловным минимумом).

В точках B и D – экстремума нет (точки «внутреннего» касания).

Условный локальный максимум в точках $E = (2, 0)$ и $F = (-2, 0)$ (точки «внешнего» касания).

Метод множителей Лагранжа (аппарат необходимых и достаточных условий)

Определение 1. Ограничение $\varphi_j(X) \le 0$ называют ***активным*** в точке X^*, если $\varphi_j(X^*) = 0$, т.е. точка X^* принадлежит линии (поверхности), описывающей ограничение.

Определение 2. Ограничение $\varphi_j(X) \le 0$ называют ***пассивным*** в точке X^*, если $\varphi_j(X^*) < 0$, т.е. точка X^* не принадлежит линии (поверхности), описывающей ограничение.

Теорема 1. (о необходимых условиях регулярного экстремума)

Пусть X^* есть точка локального условного минимума (максимума) в задаче *, и при этом $\nabla\varphi_j(X^*)$, $j = 1..m$ являются линейно-независимыми, то найдутся такие λ_j^*, что:

- $\dfrac{\partial L(X^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1..n$ (условие стационарности функции Лагранжа по x);
- $\lambda_j \cdot \varphi_j(X^*) = 0, \quad j = 1..m$ (***условие дополняющей нежесткости***);
- $\lambda_j \ge 0, \quad j = 1..m$ (условие на знак множителей Лагранжа для условного минимума)

или

$\lambda_j \le 0, \quad j = 1..m$ (условие на знак множителей Лагранжа для условного максимума);

- $\varphi_j(X^*) \le 0 \quad j = 1..m$ (условие допустимости решения).

Теорема была доказана Куном и Таккером, и в литературе встречается под названием теорема Куна-Таккера.

В отличие от случая ограничений типа равенств, необходимые условия экстремума формулируются отдельно для минимума и для максимума.

Теорема 2. (о достаточных условиях регулярного экстремума первого порядка)

Пусть в точке (X^*, λ^*) выполняются необходимые условия экстремума, и число активных ограничений в X^* совпадает с числом переменных. Если для всех активных ограничений в X^* соответствующие $\lambda_j > 0$, то X^* – точка условного локального минимума. Если для всех активных ограничений в X^* соответствующие $\lambda_j < 0$, то X^* – точка условного локального максимума.

Теорема 3. (о достаточных условиях регулярного экстремума второго порядка)

Если в точке (X^*, λ^*) выполняются необходимые условия экстремума и второй дифференциал функции Лагранжа $d^2L(X^*, \lambda^*) > 0$ ($d^2L(X^*, \lambda^*) < 0$) при всех ненулевых dx_i таких, что:

- $d\varphi_j(X^*) = 0$ для всех активных в X^* ограничений при $\lambda_j \ne 0$,
- $d\varphi_j(X^*) \le 0$ для всех активных в X^* ограничений при $\lambda_j = 0$,

то X^* – точка условного локального условного минимума (максимума) функции.

Алгоритм решения задачи методом множителей Лагранжа

1. Записать классическую функцию Лагранжа: $L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(X)$

2. Записать необходимые условия экстремума ФМП при ограничениях типа неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X, \lambda)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial \varphi_j(X)}{\partial x_i} = 0, & i = 1..n \\ \lambda_j \cdot \varphi_j(X) = 0, & j = 1..m \end{cases}$$

3. Решить полученную систему полным перебором вариантов: ограничение $\varphi_j(X)$ – активно или $\varphi_j(X)$ – пассивно, тогда $\lambda_j = 0$. Всего 2^m – вариантов.

Решения системы – условно-стационарные точки (X^*, λ^*).

Замечание. Если точка (X^*, λ^*) была получена в результате решения одного из вариантов системы, при котором полагалось, что $\varphi_j(X)$ – пассивно, но при этом оказалось, что $\varphi_j(X^*) = 0$, такая точка из рассмотрения исключается.

4. Отбраковка.
Из рассмотрения исключить точки, не принадлежащие множеству допустимых решений.
Из рассмотрения исключить точки, для которых λ_j^* – разных знаков. Оставшиеся точки, для которых $\lambda_j^* \ge 0$ – кандидаты на минимум, $\lambda_j^* \le 0$ – кандидаты на максимум, и для которых $\lambda_j^* = 0$ – кандидаты на минимум и максимум.

5. Для оставшихся точек (X^*,λ^*) проверить достаточные условия экстремума первого порядка: если число активных ограничений в точке (X^*,λ^*) равно числу переменных и на активных ограничениях $\lambda_j > 0$ ($\lambda_j < 0$), то точка X^* – условный локальный минимум (максимум).

6. Для оставшихся точек (X^*,λ^*) проверить достаточные условия экстремума, для этого

Записать второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2L = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$

Записать дифференциалы ограничений $d\varphi_j(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial \varphi_j(X)}{\partial x_i}dx_i$

В каждой точке (X^*,λ^*):

6.1. Вычислить второй дифференциал $d^2L(X^*,\lambda^*)$.

6.2. Записать условия, накладываемые на дифференциалы активных ограничений в каждой точке X^*:

- $d\varphi_j(X^*) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_{X^*}\cdot dx_i = 0$ при $\lambda_j \ne 0$,
- $d\varphi_j(X^*) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_{X^*}\cdot dx_i \le 0$ при $\lambda_j = 0$.

Замечание. Если в точке все ограничения пассивны, то исследуется знак $d^2L(X^*,\lambda^*)$ без условий.

6.3. Используя уравнения и (или) неравенства из п. 6.2, выразить любые дифференциалы переменных через оставшиеся, и подставить их в выражение для $d^2L(X^*,\lambda^*)$.

6.4. Определить знак $d^2L(X^*,\lambda^*)$:

- если $d^2L(X^*,\lambda^*)>0$ при $dx_i \ne 0$, и точка (X^*,λ^*) была кандидатом на минимум, то точка X^* – точка <u>условного локального минимума</u> в задаче,
если при этом точка (X^*,λ^*) кандидат на максимум – <u>экстремума в точке нет</u>;
- если $d^2L(X^*,\lambda^*)<0$ при $dx_i \ne 0$, и точка (X^*,λ^*) была кандидатом на максимум, то точка X^* – точка <u>условного локального максимума</u> в задаче,
если при этом точка (X^*,λ^*) кандидат на минимум – <u>экстремума в точке нет</u>.

Рассмотрим ***Пример №1***.

Дано:

$$f(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \to extr$$

$$x_1 + x_2 - 4 \le 0$$

$$-x_1 - x_2 - 4 \le 0$$

Найти решение задачи **методом множителей Лагранжа.**

Здесь ограничения должны быть переписаны в виде:

$$\underbrace{x_1 + x_2 - 4}_{\varphi_1(X)} \le 0, \qquad \underbrace{-x_1 - x_2 - 4}_{\varphi_2(X)} \le 0$$

Решение:

1. Запишем функцию Лагранжа: $L(X,\lambda) = (x-1)^2 + (x_2-1)^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(-x_1 - x_2 - 4)$.

2. Запишем необходимые условия экстремума:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_1 - 1) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ &\lambda_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ &\lambda_2(-x_1 - x_2 - 4) = 0 \end{aligned}\right\}$$

3. Найдем координаты условно-стационарных точек.

Случай а) $\varphi_1(X)$ – пассивно, значит $\lambda_1 = 0$;

$\varphi_2(X)$ – пассивно, значит $\lambda_2 = 0$.

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) = 0 \\ 2(x_2 - 1) = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (1, 1; 0, 0)$$

Случай б) $\varphi_1(X)$ – активно, значит $\varphi_1(X) = 0$;

$\varphi_2(X)$ – активно, значит $\varphi_2(X) = 0$.

Из чертежа следует, что система решений не имеет, т.к. линии ограничений представляют собой параллельные прямые и общих точек не имеют.

Случай в) $\varphi_1(X)$ – активно, значит $\varphi_1(X) = 0$;

$\varphi_2(X)$ – пассивно, значит $\lambda_2 = 0$.

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) + \lambda_1 = 0 \\ 2(x_2 - 1) + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (2, 2; -2, 0)$$

Случай г) $\varphi_1(X)$ – пассивно, значит $\lambda_1 = 0$;

$\varphi_2(X)$ – активно, значит $\varphi_2(X) = 0$.

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) - \lambda_2 = 0 \\ 2(x_2 - 1) - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \\ \lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (-2, -2; 0, -6)$$

4. Отбракуем лишние точки:

Координаты	Принадлежность МДР	Знак λ_j	Вывод
$A = (1,1; 0, 0)$	$\in$ МДР	$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0$	кандидат на минимум, кандидат на максимум
$B = (2, 2; -2, 0)$	$\in$ МДР	$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 = 0$	кандидат на максимум
$C = (-2, -2; 0, -6)$	$\in$ МДР	$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 < 0$	кандидат на максимум

Все точки принадлежат МДР, A – кандидат на минимум и кандидат на максимум, B – кандидат на максимум, C – кандидат на максимум.

5. Проверим ДУ 1-го порядка.
В точке А ДУ 1-го порядка не выполняются, т.к. в точке нет активных ограничений.
В точках B и C ДУ 1-го порядка не выполняются, т.к. число активных ограничений в этих точках $m = 1$ меньше числа переменных $n = 2$.

6. Установим тип полученных точек с помощью ДУ 2-го порядка.

Составляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{d^2 L = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2}$$

Составляем дифференциалы ограничений:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{d\varphi_1(X) = dx_1 + dx_2}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -1 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{d\varphi_2(X) = -dx_1 - dx_2}$$

Точка $\underline{A = (1,1; 0, 0)}$ – кандидат на минимум и кандидат на максимум, активных ограничений нет.

Имеем $d^2L(A) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$, на дифференциалы dx_1 и dx_2 условия не накладываются, дифференциалы dx_1 и dx_2 являются независимыми.

Получим $d^2L(A) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0,\ dx_2 \neq 0$, следовательно, точка A – условный локальный минимум.

Точка $\underline{B = (2, 2; -2, 0)}$ – кандидат на максимум, активно ограничение ϕ_1, $\lambda_1 = -2 \neq 0$.

Имеем $d^2L(B) = 2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(B) = dx_1 + dx_2 = 0 \ \Rightarrow \ dx_1 = -dx_2$.

Получим $d^2L(B)=4(dx_2)^2>0$ при $dx_2 \neq 0$, но точка B – кандидат на максимум (<u>противоречие</u>), следовательно, в точке B экстремума нет.

Точка $\underline{C=(-2,-2;0,-6)}$ – кандидат на максимум, активно ограничение ϕ_2, $\lambda_2=-6\neq 0$.
Имеем $d^2L(C)=2(dx_1)^2+2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_2(C)=-dx_1-dx_2=0 \;\Rightarrow\; dx_1=-dx_2$.
Получим $d^2L(C)=4(dx_2)^2>0$ при $dx_2\neq 0$, но точка C – кандидат на максимум (<u>противоречие</u>), следовательно, в точке C экстремума нет.

<u>Ответ:</u> получена точка $A=(1,1)$, $f(A)=0$ – точка условного локального минимума.

Рассмотрим ***Пример №2***.

<u>Дано:</u>
$$f(X)=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2 \to extr$$
$$x_1+x_2-4\le 0$$
$$-x_1-x_2-4\le 0$$
Найти решение задачи **<u>методом множителей Лагранжа.</u>**

Здесь ограничения должны быть переписаны в виде:
$$\underbrace{x_1+x_2-4}_{\varphi_1(X)}\le 0,\qquad \underbrace{-x_1-x_2-4}_{\varphi_2(X)}\le 0$$
<u>Решение:</u>
1. Запишем функцию Лагранжа: $L(X,\lambda)=(x-4)^2+(x_2-4)^2+\lambda_1(x_1+x_2-4)+\lambda_2(-x_1-x_2-4)$.

2. Запишем необходимые условия экстремума: $$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-4)+\lambda_1-\lambda_2=0\\&\frac{\partial L}{\partial x_2}=2(x_1-4)+\lambda_1-\lambda_2=0\\&\lambda_1(x_1+x_2-4)=0\\&\lambda_2(-x_1-x_2-4)=0\end{aligned}\right\}$$
3. Найдем координаты условно-стационарных точек.

<u>Случай а)</u> $\varphi_1(X)-$пассивно, значит $\lambda_1=0$;
$\varphi_2(X)-$пассивно, значит $\lambda_2=0$.
$$\begin{cases}2(x_1-4)=0\\2(x_2-4)=0\\\lambda_1=0\\\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4\\x_2=4\\\lambda_1=0\\\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow A=(4,4;0,0)$$

<u>Случай б)</u> $\varphi_1(X)-$активно, значит $\varphi_1(X)=0$;

$\varphi_2(X)-$активно, значит $\varphi_2(X)=0$.

Из чертежа следует, что система решений не имеет, т.к. линии ограничений представляют собой параллельные прямые и общих точек не имеют.

<u>Случай в)</u> $\varphi_1(X)-$активно, значит $\varphi_1(X)=0$;

$\varphi_2(X)-$пассивно, значит $\lambda_2=0$.

$$\begin{cases} 2(x_1-4)+\lambda_1=0 \\ 2(x_2-4)+\lambda_1=0 \\ x_1+x_2-4=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=2 \\ \lambda_1=4 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow B=(2,2;4,0)$$

<u>Случай г)</u> $\varphi_1(X)-$пассивно, значит $\lambda_1=0$;

$\varphi_2(X)-$активно, значит $\varphi_2(X)=0$.

$$\begin{cases} 2(x_1-4)-\lambda_2=0 \\ 2(x_2-4)-\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ -x_1-x_2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-2 \\ \lambda_1=4 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow C=(-2,-2;0,-12)$$

4. Отбракуем лишние точки:

Координаты	Принадлежность МДР	Знак λ_j	Вывод
$A=(4,4;0,0)$	$\notin$ МДР, отбраковывается	———	———
$B=(2,2;4,0)$	$\in$ МДР	$\lambda_1>0 \quad \lambda_2=0$	кандидат на минимум
$C=(-2,-2;0,-12)$	$\in$ МДР	$\lambda_1=0 \quad \lambda_2<0$	кандидат на максимум

Исключаем точку A, поскольку она не принадлежит множеству допустимых решений, из оставшихся точек: B – кандидат на минимум, C – кандидат на максимум.

5. Проверим ДУ 1-го порядка: в точках B и C они не выполняются, т.к. число активных ограничений в этих точках $m=1$ меньше числа переменных $n=2$.

6. Установим тип полученных точек с помощью ДУ 2-го порядка.

Составляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{d^2L=2(dx_1)^2+2(dx_2)^2}$$

Составляем дифференциалы ограничений:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}=1 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}=1 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{d\varphi_1(X)=dx_1+dx_2}$$

$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}=-1 \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=-1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\varphi_2(X)=-dx_1-dx_2}$

Точка $\underline{B=(2,2;4,0)}$ – кандидат на минимум, активно ограничение ϕ_1, $\lambda_1=4\neq 0$.

Имеем $d^2L(B)=2(dx_1)^2+2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(B)=dx_1+dx_2=0 \;\Rightarrow\; dx_1=-dx_2$.

Получим $d^2L(B)=4(dx_2)^2>0$ при $dx_2\neq 0$, следовательно, точка B – условный локальный минимум.

Точка $\underline{C=(-2,-2;0,-12)}$ – кандидат на максимум, активно ограничение ϕ_2, $\lambda_2=-12\neq 0$.

Имеем $d^2L(C)=2(dx_1)^2+2(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_2(C)=-dx_1-dx_2=0 \;\Rightarrow\; dx_1=-dx_2$.

Получим $d^2L(C)=4(dx_2)^2>0$ при $dx_2\neq 0$, но точка C – кандидат на максимум (<u>противоречие</u>), следовательно, в точке C экстремума нет.

<u>Ответ:</u> получена точка $B=(2,2)$, $f(B)=8$ – точка условного локального минимума.