МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(Государственный технический университет)

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

по курсам

«ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ и ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

«МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

АЛГОРИТМЫ МЕТОДОВ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ, РЕАЛИЗОВАННЫЕ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ

С.Ю. Лунева

Москва, 2004

Содержание

Методы первого порядка 2
(1) Метод градиентного спуска 2
(2) Метод градиентного наискорейшего спуска 4
(3) Метод покоординатного спуска 6
(4) Метод Гаусса-Зейделя (наискорейшего покоординатного спуска) 7
(5) Метод сопряженных градиентов 8
Методы второго порядка 10
(6) Метод Ньютона 10
(7) Метода Ньютона-Рафсона 11
Методы нулевого порядка 12
(8) Метод конфигураций (Хука-Дживса) 12
(9) Метод Нелдера-Мида (деформируемого многогранника) 14
(10) Метод случайного поиска (адаптивный метод случайного спуска) 17

Методы первого порядка

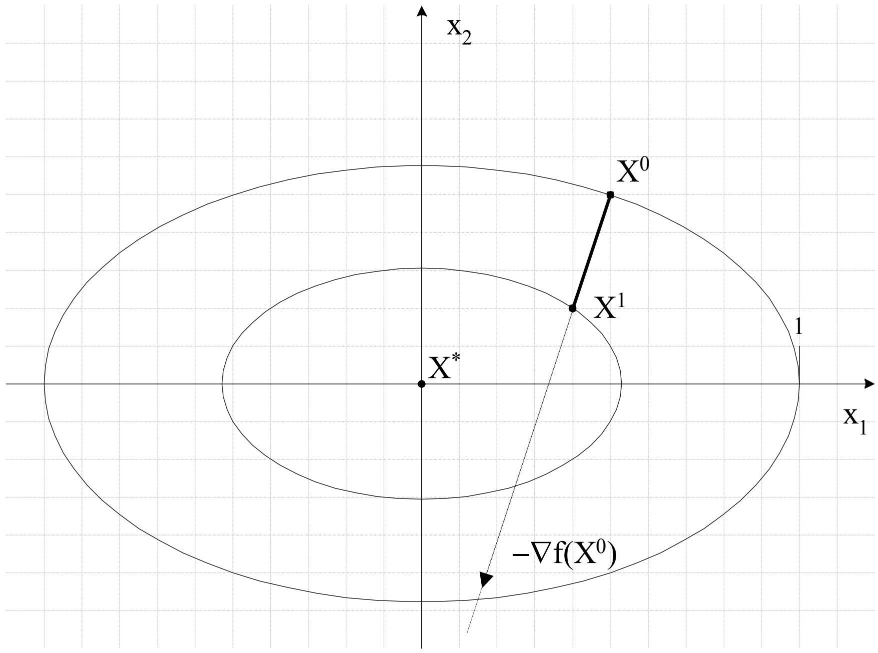
(1) Метод градиентного спуска

Алгоритм метода: $\boxed{X^{k+1} = X^k - t_k \nabla f(X^k)}$ (1.1)

здесь:

- $d^k = -\nabla f(X^k)$ - направление антиградиента функции; (1.2)
- t_k - шаг выбирается из условия убывания функции в точках последовательности:
  $f(X^{k+1}) < f(X^k)$. (1.3)

Геометрическая интерпретация метода:



Основной критерий окончания метода:

Построение последовательности заканчивается в точке, для которой:

$\left\|\nabla f(X^k)\right\| < \varepsilon$, где ε - заданное малое положительное число, (1.4)

здесь $\left\|\nabla f(X^k)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

Начальные параметры метода: X^0, t_0, ε.

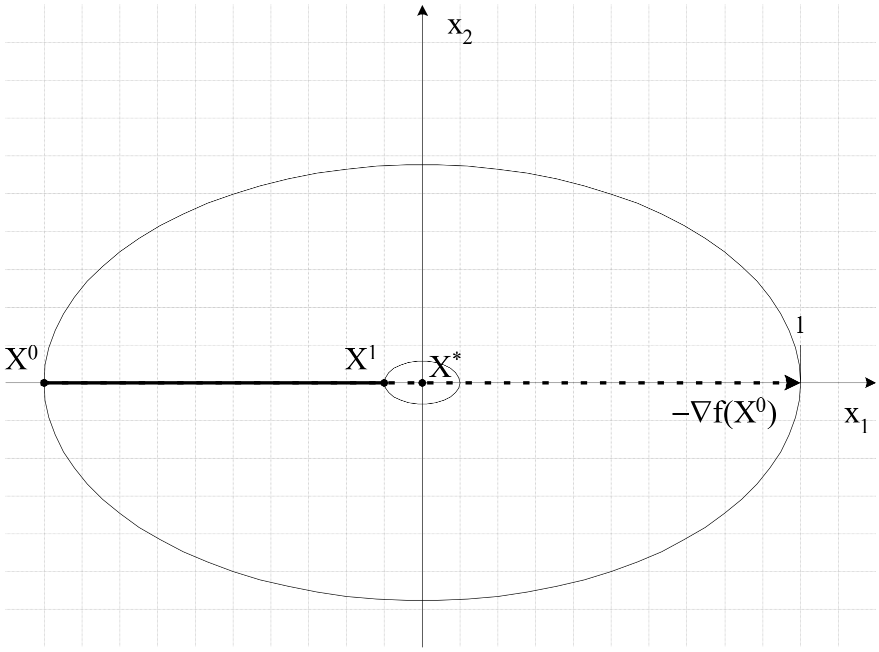
Изменяемый параметр метода: величина шага t_k.

Особенности реализации алгоритма. Вопрос о величине шага на каждой итерации решается пользователем, причем шаг может быть, как уменьшен, если не выполняется условие (1.3), так и увеличен, если скорость сходимости алгоритма невысока (по субъективной оценке пользователя).

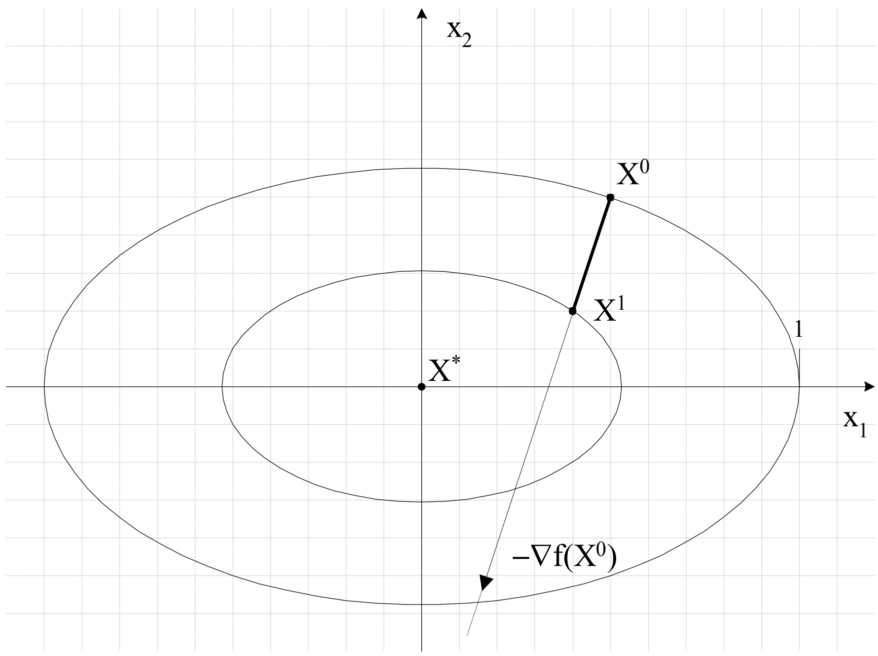
Рекомендации по выбору параметров метода

Согласно алгоритму метода, каждая последующая точка X^{k+1} в методе градиентного спуска ищется в направлении $-\nabla f(X^k)$ направлении антиградиента функции, построенном в текущей точке X^k. Поэтому, если направление антиградиента в текущей точке приблизительно совпадает с направлением на минимум (согласно чертежу), шаг следует увеличить, чтобы ускорить процесс сходимости, если же направление антиградиента сильно отличается от направления на минимум, шаг уменьшают, в противном случае функция может уменьшиться несущественно или даже возрасти.

На нижнем рисунке слева представлен случай, когда текущий шаг следует увеличить, а на рисунке справа – когда нужно уменьшить



Текущий шаг нужно увеличить



Текущий шаг нужно уменьшить

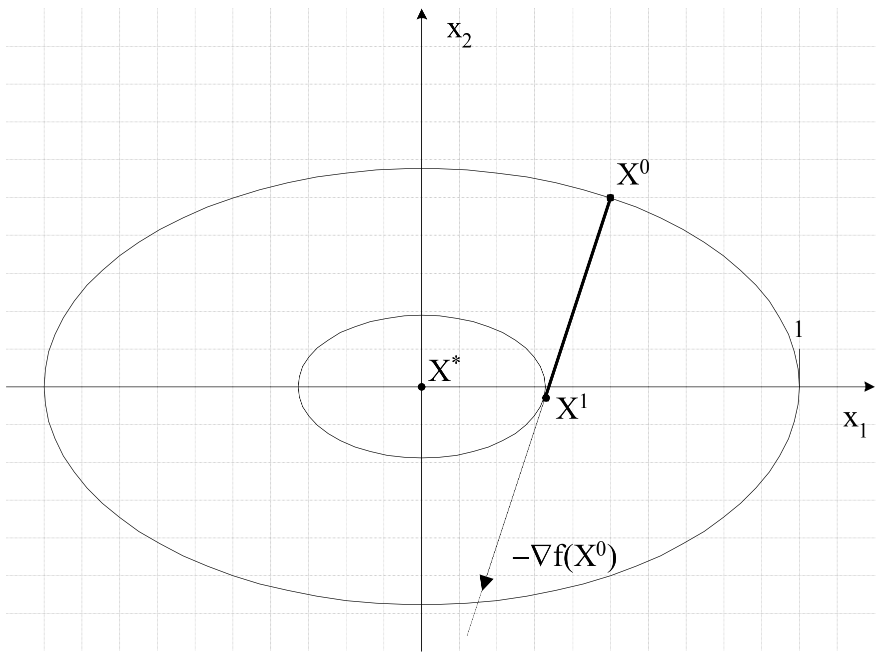
(2) Метод градиентного наискорейшего спуска

Алгоритм метода: $\boxed{X^{k+1} = X^k - t_k \nabla f(X^k)}$ (2.1)

здесь

- $d^k = -\nabla f(X^k)$ - направление антиградиента функции (2.2)
- t_k - шаг вычисляется из условия наибольшего убывания функции в точках последовательности, построенной по закону (2.1): $t_k = \arg\min[f(X^{k+1})]$ (2.3)

Геометрическая интерпретация метода



В методе наискорейшего градиентного спуска последующая точка X^{k+1} минимизирую щей последовательности также ищется в направлении $-\nabla f(X^k)$ - направлении антиградиента функции, построенном в текущей точке, но условия вычисления шага позволяют определить наилучшее положение точки X^{k+1} на этом направлении. Как видно из чертежа, точка X^1 принимает на направлении спуска $d^0 = -\nabla f(X^0)$ предельное положение, которое характеризуется тем, что линия уровня, проходящая через точку X^1 касается направления спуска, а, следовательно, в точках минимизирующей последовательности, построенной по методу градиентного наискорейшего спуска выполняется условие:

$$\nabla f(X^k) \perp \nabla f(X^{k+1}) \quad \Rightarrow \quad (\nabla f(X^k), \nabla f(X^{k+1})) = 0 \qquad (2.4)$$

Основной критерий окончания метода:

Построение последовательности заканчивается в точке, для которой:

$\left\| \nabla f(X^k) \right\| < \varepsilon$, где ε - заданное малое положительное число. (2.5)

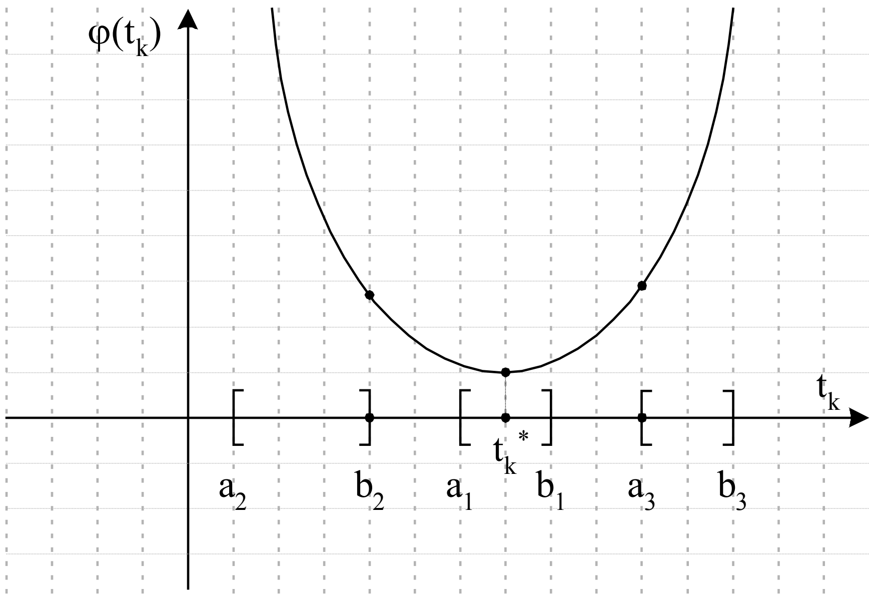
При решении задачи поиска оптимального шага $t_k = \arg\min(f(X^{k+1}))$, функция $f(X^{k+1})$ становится функцией одой переменной $\varphi(t_k)$, т.к. $X^{k+1} = X^k - t_k \nabla f(X^k)$, а X^k и $\nabla f(X^k)$ известны. Следовательно, задача о поиске оптимального шага t_k - это задача $f(X^{k+1}) = \varphi(t_k) \to \min$, которая в лабораторной работе решается численно методом дихотомии (см. [2], глава II, §5, п. 5.1.4.) на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью ε_D.

<u>Начальные параметры метода:</u> $X^0,\ \varepsilon, \varepsilon_D$.
<u>Изменяемые параметры метода</u>: отрезок для уточнения шага $[a, b]$.

Особенности реализации алгоритма. Вопрос о границах отрезка $[a, b]$ на каждой итерации решается пользователем.

Рекомендации по выбору параметров метода.
При задании на каждой итерации отрезка $[a, b]$ для уточнения шага, следует помнить, что искомое решение может лежать как внутри, так и на границе интервала $[a, b]$.

Проиллюстрируем ситуацию, при которой шаг t_k вычисляется численно методом дихотомии. Для этого построим график функции $f(X^{k+1}) = \varphi(t_k)$, которая в случае если $f(X)$ является квадратичной функцией, имеет вид: $f(X^{k+1}) = \varphi(t_k) = At_k^2 + Bt_k + C$.



Для вычислений по методу дихотомии должен быть задан отрезок для уточнения оптимального значения шага.
Как видно из чертежа, если в качестве отрезка будет выбран $[a_1, b_1]$, оптимальное значение шага при котором функция $f(X^{k+1}) = \varphi(t_k)$ принимает минимальное значение, окажется внутри отрезка и метод с заданной точностью ε_D отыщет это значение, если же отрезок будет $[a_2, b_2]$ в качестве результата счета по методу дихотомии будет получено значение $t_k = b_2$ - как дающее наименьшее значение функции $f(X^{k+1}) = \varphi(t_k)$ на отрезке, аналогично при выборе отрезка $[a_3, b_3]$ будет получено значение $t_k = a_3$.

Таким образом, отрезок для уточнения оптимального шага должен быть достаточно большим, чтобы гарантировано включать искомое значение шага. Признаками неверного задания отрезка $[a, b]$ являются: отсутствие касания траектории спуска из точки X^k и линии уровня функции через точку X^{k+1}, а также равенство величины оптимального шага величине одной из границ отрезка $[a, b]$.

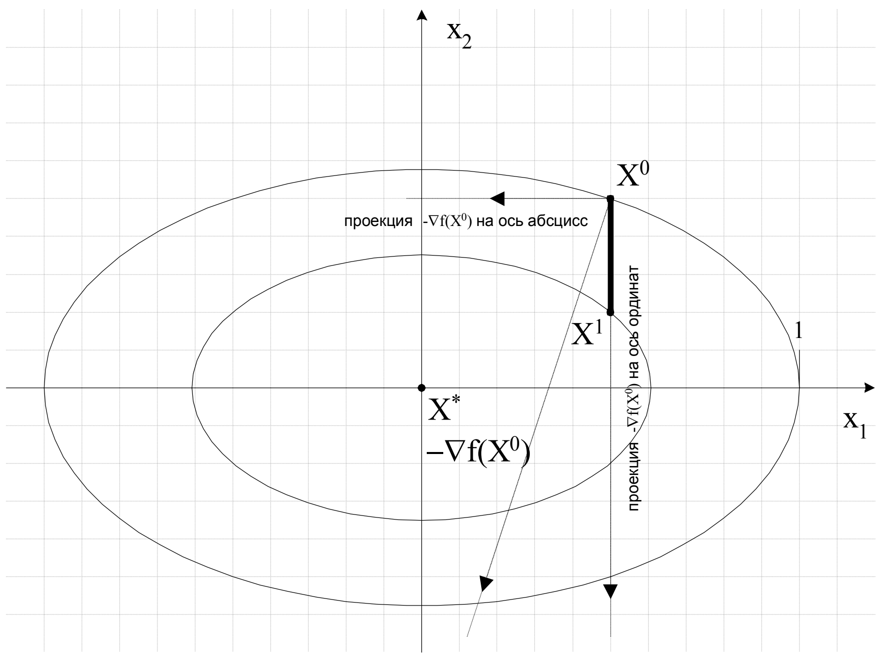
(3) Метод покоординатного спуска

Алгоритм метода: $\boxed{X^{k+1} = X^k - t_k \left[\nabla f(X^k)\right]_{\text{пр на } x_i}}$ (3.1)

здесь:

- $d^k = -\left[\nabla f(X^k)\right]_{\text{пр на } x_i}$ - проекция на ось x_i антиградиента функции (3.2)
- t_k - шаг выбирается из условия убывания функции в точках последовательности:
  $f(X^{k+1}) < f(X^k)$ (3.3)

Геометрическая интерпретация метода



Основной критерий окончания метода:
Построение последовательности заканчивается в точке, для которой:

$\left\|\nabla f(X^k)\right\| < \varepsilon$, где ε - заданное малое положительное число. (3.4)

Начальные параметры метода: X^0, t_0, ε.

Изменяемые параметры метода: величина шага t_k и направление проекции антиградиента (здесь абсциссы – ось x, ординаты – ось y)

Особенности реализации алгоритма. Вопрос о величине шага на каждой итерации решается пользователем, причем шаг может быть, как уменьшен, если не выполняется условие (3.3), так и увеличен, если скорость сходимости алгоритма невысока (по субъективной оценке пользователя). Вопрос о выборе направления оси для проекции антиградиента, также решается пользователем на каждой итерации.

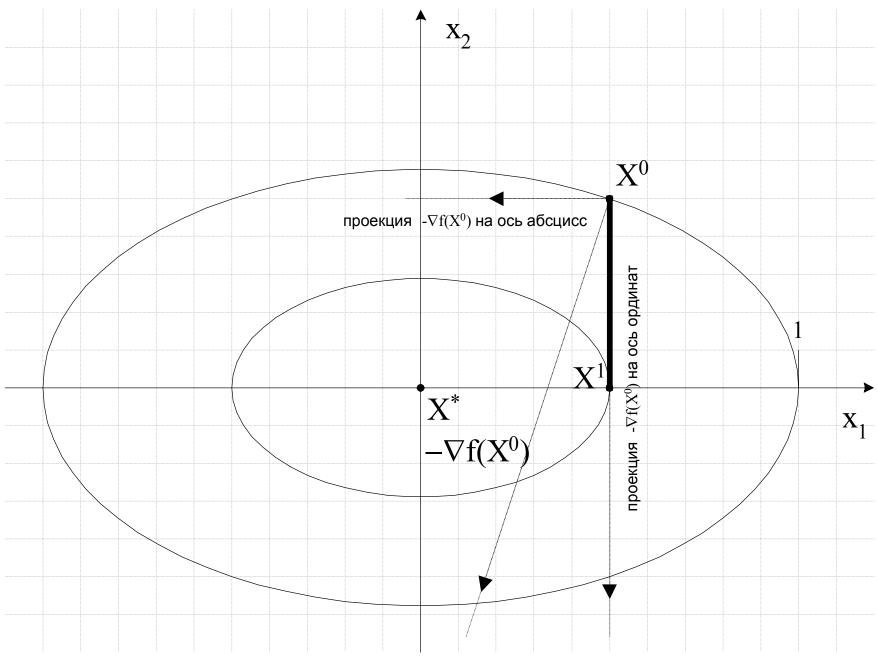
(4) Метод Гаусса-Зейделя (наискорейшего покоординатного спуска)

Алгоритм метода: $\boxed{X^{k+1} = X^k - t_k \left[\nabla f(X^k)\right]_{\text{пр на } x_i}}$ (4.1)

здесь:

- $d^k = -\left[\nabla f(X^k)\right]_{\text{пр на } x_i}$ - проекция на ось x_i антиградиента функции (4.2)
- t_k - шаг вычисляется из условия наибольшего убывания функции в точках последовательности, построенной по закону (4.1): $t_k = \arg\min[f(X^{k+1})]$ (4.3)

Геометрическая интерпретация метода



Основной критерий окончания метода:
Построение последовательности заканчивается в точке, для которой:

$\left\|\nabla f(X^k)\right\| < \varepsilon$, где ε - заданное малое положительное число. (4.4)

Задача о поиске оптимального шага t_k (задача $f(X^{k+1}) = \varphi(t_k) \to \min$) решается численно методом дихотомии (см. [2], глава II, §5, п. 5.1.4.) на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью ε_D. (см. пояснения к методу наискорейшего спуска).

Начальные параметры метода: $X^0, \ \varepsilon, \varepsilon_D$.
Изменяемые параметры метода: отрезок для уточнения шага $[a, b]$.

Особенности реализации алгоритма. Вопрос о границах отрезка $[a, b]$ на каждой итерации решается пользователем. Направление проекции градиента меняется циклически: сначала спуск в направлении оси абсцисс, затем – ординат и т.д.

Рекомендации по выбору параметров метода.
Отрезок $[a, b]$ задается из тех же соображений, что и в методе наискорейшего спуска.

(5) Метод сопряженных градиентов

(Для квадратичных функций метод сопряженных градиентов называется <u>методом Флетчера-Ривса</u>)

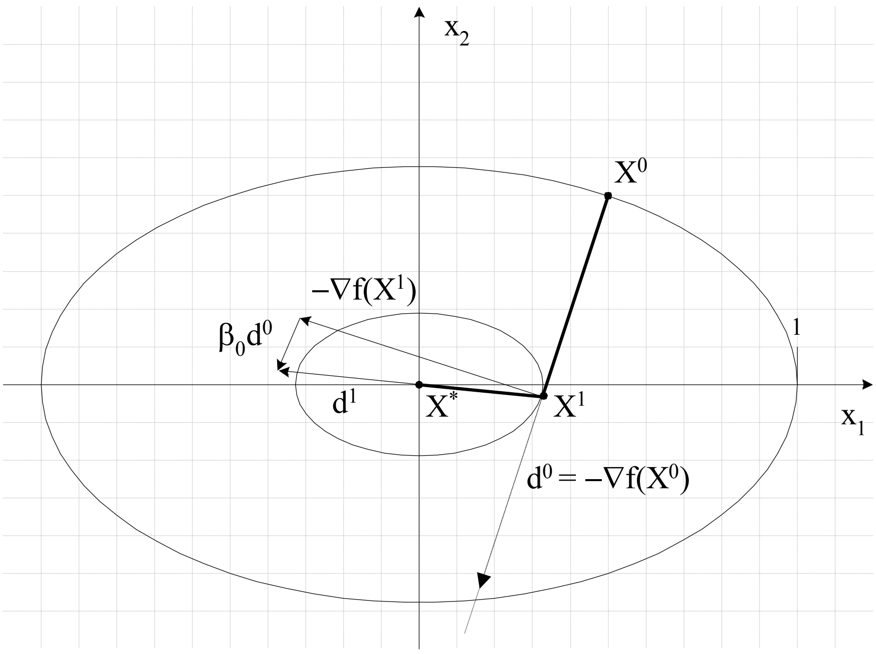
<u>Алгоритм метода</u>: $\boxed{X^{k+1} = X^k + t_k d^k}$ (5.1)

здесь:

- $d^0 = -\nabla f(X^0)$ (5.2)
- $d^k = -\nabla f(X^k) + \beta_{k-1} d^{k-1}$ (5.3)
- $\beta_{k-1} = \dfrac{\left\|\nabla f(X^k)\right\|^2}{\left\|\nabla f(X^{k-1})\right\|^2}$ (5.4)
- t_k - шаг вычисляется из условия наибольшего убывания функции в точках последовательности, построенной по закону (5.1): $t_k = \arg\min[f(X^{k+1})]$ (5.5)

Из формул (5.2) и (5.5) следует, что <u>первая итерация метода сопряженных градиентов совпадает с первой итерацией метода наискорейшего спуска.</u>

<u>Геометрическая интерпретация метода</u>



<u>Основной критерий окончания метода:</u>
Построение последовательности заканчивается в точке, для которой:

$\left\|\nabla f(X^k)\right\| < \varepsilon$, где ε - заданное малое положительное число. (5.6)

Вычисление величины β_{k-1} по формуле (5.4) обеспечивает для квадратичных функций построение последовательности H-сопряженных направлений $d^0, d^1 \ldots d^k \ldots$, для которых $(d^i, Hd^j) = 0, \forall i, j = 0, 1 \ldots k;\ i \neq j$. При этом в точках последовательности $\{X^k\}$ градиенты функции $f(X)$ взаимно перпендикулярны, т.е. $(\nabla f(X^k), \nabla f(X^{k+1})) = 0,\ k = 0, 1 \ldots$

Задача о поиске оптимального шага t_k (задача $f(X^{k+1}) = \varphi(t_k) \to \min$) решается численно методом дихотомии (см. [2], глава II, §5, п. 5.1.4.) на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью ε_D. (см. пояснения к методу наискорейшего спуска).

<u>Начальные параметры метода:</u> X^0, $\varepsilon, \varepsilon_D$.
<u>Изменяемые параметры метода</u>: отрезок для уточнения шага $[a, b]$.

Особенности реализации алгоритма. Вопрос о границах отрезка $[a, b]$ на каждой итерации решается пользователем.

Рекомендации по выбору параметров метода.
Отрезок $[a, b]$ задается из тех же соображений, что и в методе наискорейшего спуска.

Доказано, что для функций, имеющих минимум, метод Флетчера-Ривса <u>сходится</u> за конечное число шагов, не превышающее число переменных функции $f(X)$.

Замечание. Т.к. шаг t_k на каждой итерации вычисляется численно с точностью ε_D, за счет накопления ошибки, метод сопряженных градиентов в отдельных случаях может сходиться для квадратичной функции за число итераций, превышающее число переменных на 1.

Методы второго порядка

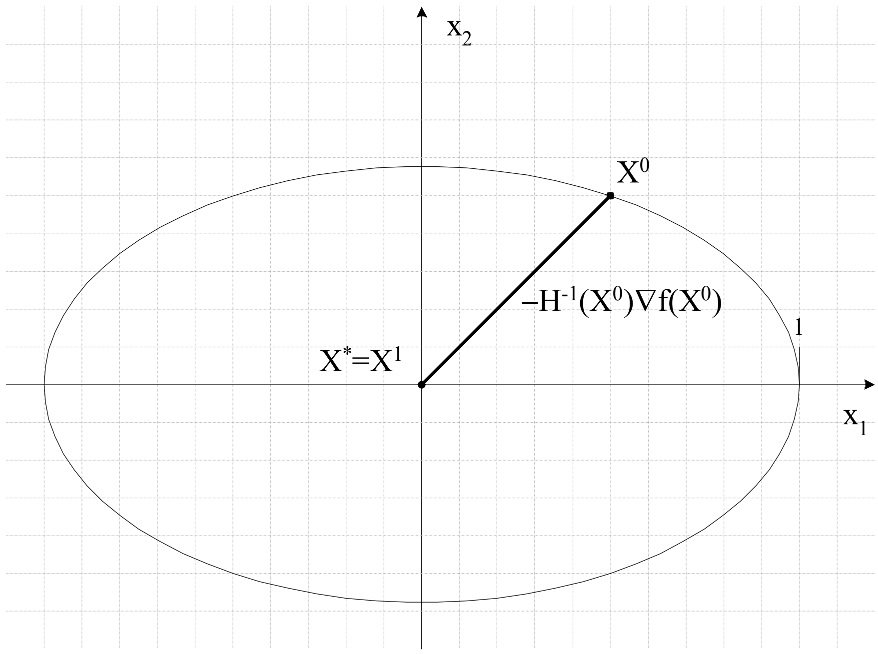
(6) Метод Ньютона

Алгоритм метода: $\boxed{X^{k+1} = X^k - H^{-1}(X^k)\nabla f(X^k)}$ (6.1)

здесь:

- $d^k = -H^{-1}(X^k)\nabla f(X^k)$ - направление спуска (6.2)
- $t_k = 1$ (6.3)

Геометрическая интерпретация метода для квадратичной функции:



Основной критерий окончания метода:
Построение последовательности заканчивается в точке, для которой:

$\left\|\nabla f(X^k)\right\| < \varepsilon$, где ε - заданное малое положительное число. (6.4)

Начальные параметры метода: $X^0,\ \varepsilon$.

Особенностью метода Ньютона является то, что при $H(X^0) > 0$ метод позволяет отыскать минимум квадратичной функции **за одну итерацию**.

(7) Метода Ньютона-Рафсона

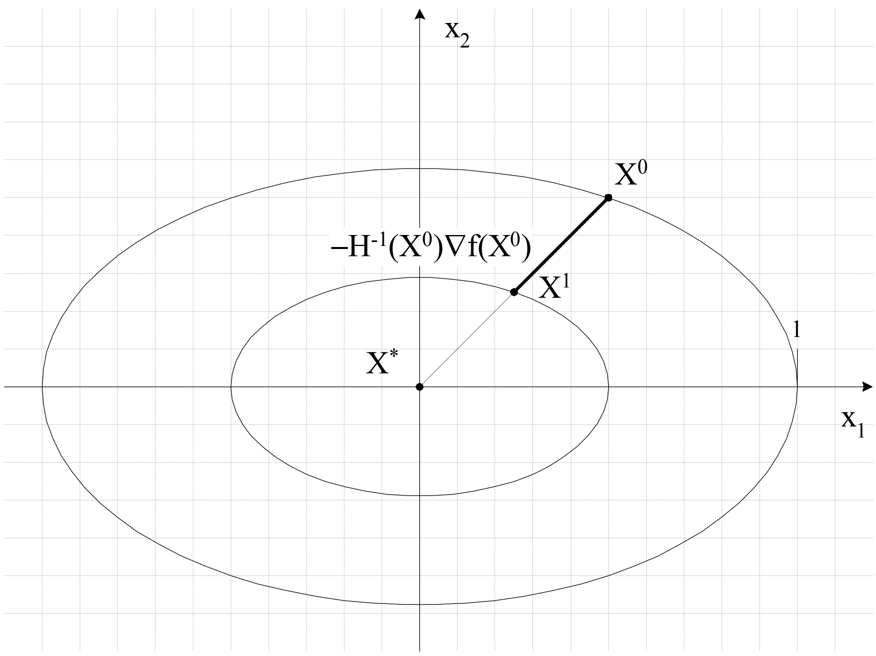
Алгоритм метода: $\boxed{X^{k+1} = X^k - t_k H^{-1}(X^k)\nabla f(X^k)}$ (7.1)

здесь:

- $d^k = -H^{-1}(X^k)\nabla f(X^k)$ - направление спуска (7.2)
- t_k - шаг выбирается из условия убывания функции в точках последовательности:

  $f(X^{k+1}) < f(X^k)$. (7.3)

Геометрическая интерпретация метода для квадратичной функции:



Основной критерий окончания метода:
Построение последовательности заканчивается в точке, для которой:

$\left\|\nabla f(X^k)\right\| < \varepsilon$, где ε - заданное малое положительное число. (7.4)

Начальные параметры метода: $X^0,\ \varepsilon$.

Изменяемый параметр метода: величина шага t_k.

Методы нулевого порядка

(8) Метод конфигураций (Хука-Дживса)

Метод представляет собой комбинацию *исследующего (исследовательского) поиска* с циклическим изменением переменных и ускоряющего *поиска по образцу*.

Процесс поиска минимума функции всегда начинается с исследующего поиска.

Исследующий поиск осуществляется вдоль координатных направлений, результатом его являются так называемые точки базиса, в которых вычисляется значение функции $f(X)$.
Поиск по образцу осуществляется в направлении, соединяющем де последующие точки базиса. В точках полученных «по образцу» значение функции не вычисляется, они служат лишь для проведения в них исследующего поиска.

Алгоритм метода (на примере функции двух переменных):

1) Задается начальная точка X^0 и начальные значение приращений dx^0, dy^0. Точка X^0 называется точкой старого базиса.

2) Проводится исследующий поиск, в результате которого каждая координата новой точки X^{k+1} вычисляется по алгоритму:

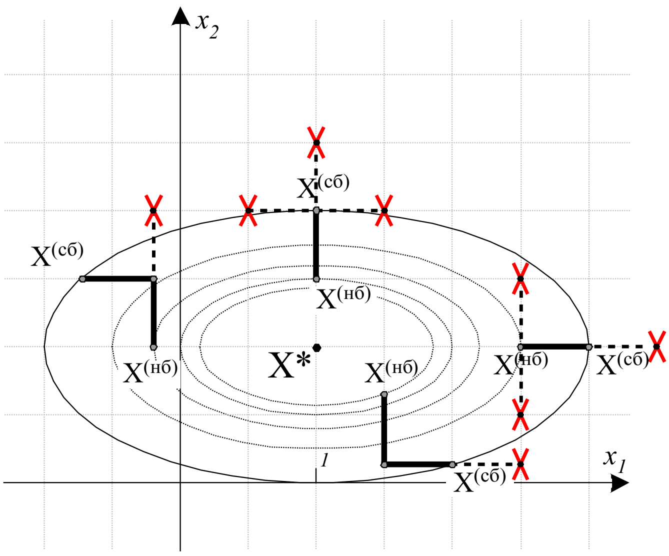
$$x^{k+1} = \begin{cases} x^k + dx^k, & \text{если } f(x^k + dx^k, y^k) < f(x^k, y^k) \\ x^k - dx^k, & \text{если } f(x^k - dx^k, y^k) < \min\left(f(x^k, y^k), f(x^k + dx^k, y^k)\right) \\ x^k, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$y^{k+1} = \begin{cases} y^k + dy^k, & \text{если } f(x^k, y^k + dy^k) < f(x^k, y^k) \\ y^k - dy^k, & \text{если } f(x^k, y^k - dy^k) < \min\left(f(x^k, y^k), f(x^k, y^k + dy^k)\right) \\ y^k, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

В результате исследующего поиска получается точка X^{k+1}.

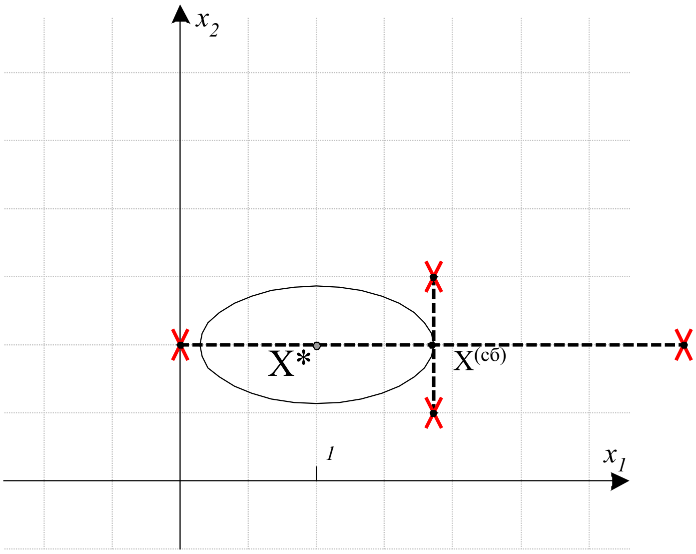
Если при этом $X^{k+1} \neq X^k$, то X^{k+1} - точка нового базиса.

Если $X^{k+1} = X^k$, то исследующий поиск неудачен. В этом случае необходимо уменьшить значения приращений dx^k, dy^k и повторить исследующий поиск.



Удачный исследующий поиск

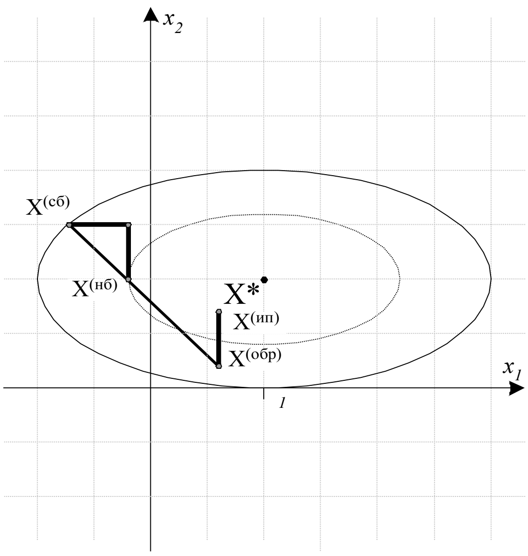
Здесь $X^{сб}$ *- точка старого базиса,* $X^{нб}$ *- точка нового базиса*



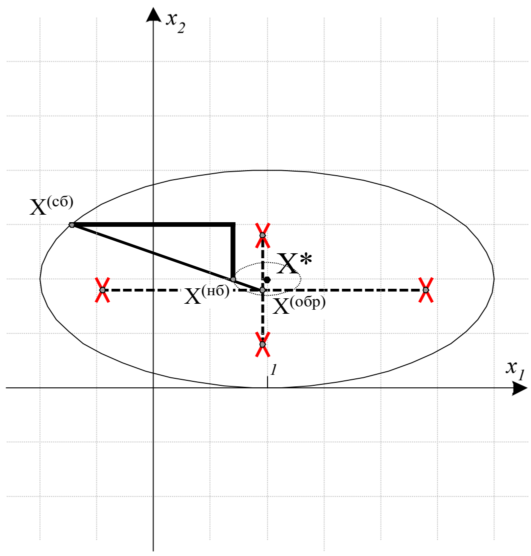
Неудачный исследующий поиск

3) Из точки нового базиса может быть:

- продолжен исследующий поиск со старыми или новыми значениями приращений (шаг 2) алгоритма)
- проведен поиск по образцу по алгоритму: $X^{обр} = X^k + t_k(X^k - X^{k-1})$



Удачный поиск по образцу



Неудачный поиск по образцу

В точке $X^{обр}$ значение функции не вычисляется, из этой точки проводится исследующий поиск, в результате которого получается точка $X^{ип}$.

Если $X^{ип} \neq X^{обр}$, то точка $X^{k+1} = X^{ип}$ становится точкой нового базиса, а X^k - точкой старого базиса. Если $X^{ип} = X^{обр}$, то поиск по образцу считается неудачным, точки $X^{ип}, X^{обр}$ - аннулируются, при этом точка X^k остается точкой нового базиса, а X^{k-1} - точкой старого базиса.

4) Процедура 3) повторяется до выполнения критерия окончания счета.

<u>Основной критерий окончания метода</u>: $dx^k \le \varepsilon, \quad dy^k \le \varepsilon$

<u>Начальные параметры метода:</u> X^0, ε, начальные значение приращений dx^0, dy^0.

<u>Изменяемый параметр метода</u>: величины приращений dx^k, dy^k.

(9) Метод Нелдера-Мида (деформируемого многогранника)

Алгоритм метода (на примере функции двух переменных):

1) Задается начальная система точек (многогранник), включающая в себя 3 точки: $X^{0(1)}, X^{0(2)}, X^{0(3)}$

2) Вычисляется значение функции во всех точках многогранника и выбирается:

лучшая точка $X^{(л)}$: $f(X^{(л)}) = \min\limits_{i}\left[f(X^{k(i)}\right]$ (здесь k - номер итерации, i - номер точки)

худшая точка $X^{(х)}$: $f(X^{(х)}) = \max\limits_{i}\left[f(X^{k(i)}\right]$

Далее заданная система точек перестраивается, для этого:

3) Строится центр тяжести системы заданных точек за исключением худшей:

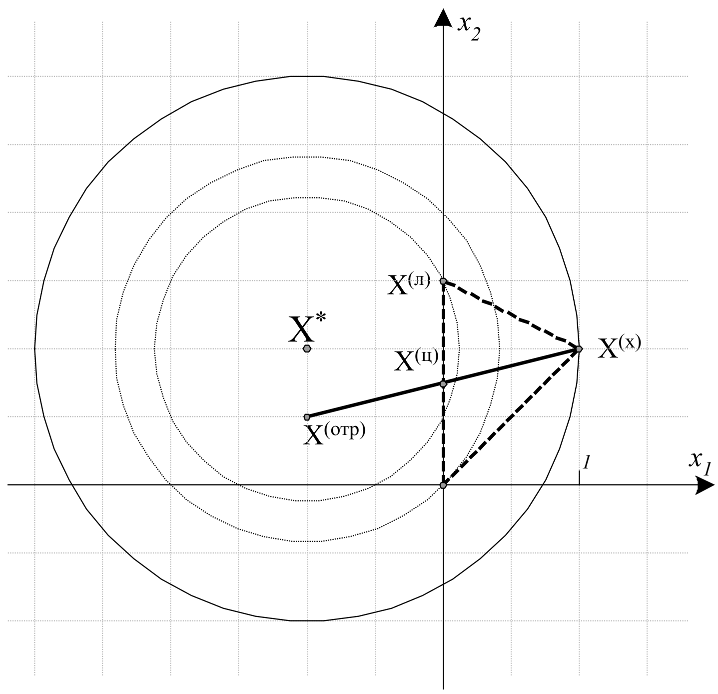
$$\boxed{X^{(ц)} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n=1} X^{k(i)} - X^{(х)}\right)}$$

(для функции 2-х переменных точка $X^{(ц)}$ - середина отрезка, соединяющего точки за исключением худшей)

4) Выполняется операция *отражение* худшей точки через центр тяжести:

$$\boxed{X^{(отр)} = X^{(ц)} + \alpha \cdot (X^{(ц)} - X^{(х)})},$$

здесь $\alpha > 0$ - параметр отражения (рекомендуемое значение $\alpha = 1$).

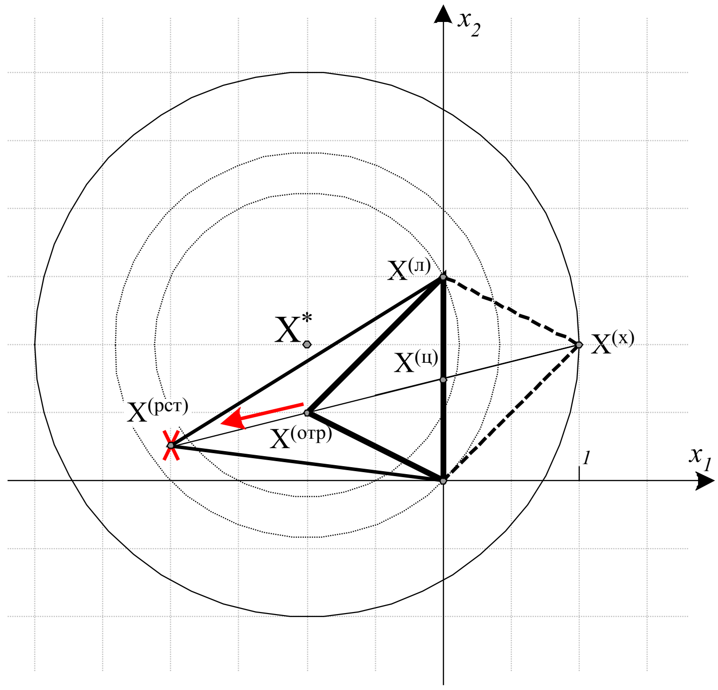


5) Формируется новая система точек (многогранник). Для этого в точке $X^{(отр)}$ вычисляется значение функции, полученное значение сравнивается с $f(X^{(л)})$:

- если $f(X^{(отр)}) < f(X^{(л)})$ выполняется операция *растяжение*:

$$\boxed{X^{(рст)} = X^{(ц)} + \gamma(X^{(отр)} - X^{(ц)})},$$

здесь $\gamma > 0$ $(\gamma \neq 0)$ - параметр растяжения (рекомендованное значение $\gamma \in [2, 3]$)

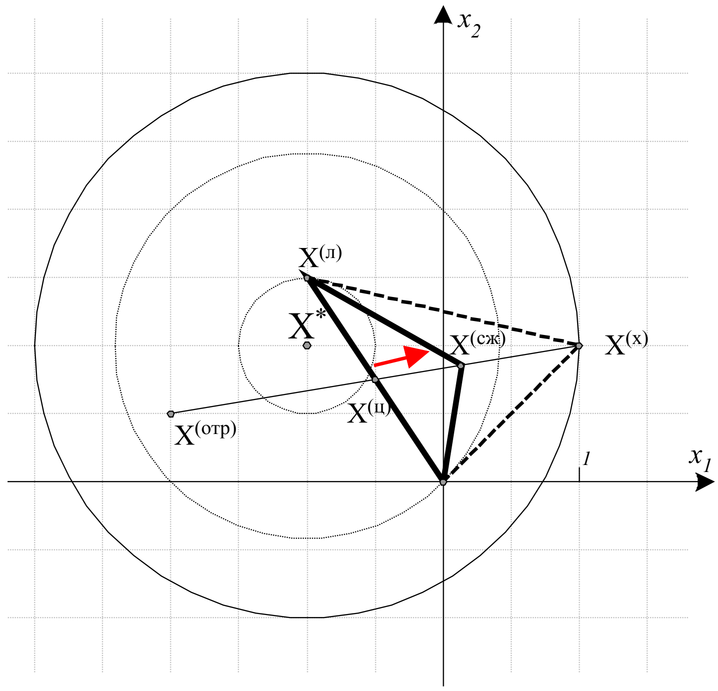


При этом если $f(X^{(рст)}) < f(X^{(отр)})$, то в новой системе точек точка $X^{(x)}$ будет заменена на $X^{(рст)}$, если же $f(X^{(рст)}) \geq f(X^{(отр)})$, то в новой системе точек точка $X^{(x)}$ будет заменена на $X^{(отр)}$.

- если $f(X^{(л)}) \leq f(X^{(отр)}) < f(X^{(x)})$ выполняется операция *сжатие*:

$$\boxed{X^{(сж)} = X^{(ц)} + \beta(X^{(x)} - X^{(ц)})},$$

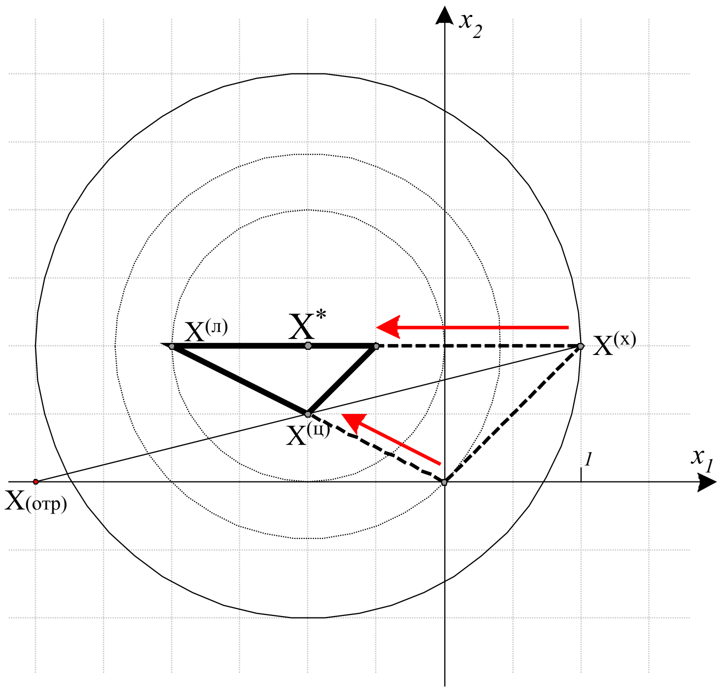
здесь $\beta > 0 \quad (\beta \neq 0)$ - параметр сжатия (рекомендованное значение $\beta \in [0.4, 0.6]$).



При этом если $f(X^{(сж)}) < f(X^{(отр)})$, то в новой системе точек точка $X^{(x)}$ будет заменена на $X^{(сж)}$, если же $f(X^{(сж)}) \ge f(X^{(отр)})$, то в новой системе точек точка $X^{(x)}$ будет заменена на $X^{(отр)}$.

- если $f(X^{(отр)}) \ge f(X^{(x)})$ выполняется операция ***редукции***: при этом формируется новый многогранник, содержащий точку $X^{(л)}$ с уменьшенными вдвое сторонами:

$$\boxed{X^{k+1(i)} = X^{(л)} + 0.5(X^{k(i)} - X^{(л)}), \quad i = 1..n+1}$$



Т.о. в результате выполнения этого пункта алгоритма формируется новая система точек (многогранник), причем в случае возникновения операций растяжения и сжатия перестраивается только одна точка - $X^{(x)}$, в случае возникновения операции редукции – все точки, за исключением $X^{(л)}$.

6) Процедура 2)-5) повторяется до выполнения критерия окончания счета.

Основной критерий окончания метода: $\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left[f(X^{k(i)}) - f(X^{(ц)})\right]^2} \le \varepsilon$

Начальные параметры метода: $X^{0(1)}, X^{0(2)}, X^{0(3)}, \varepsilon$.

(10) Метод случайного поиска (адаптивный метод случайного спуска)

Алгоритм метода (на примере функции двух переменных):

1) Задается начальная точка X^0 и начальное значение параметра r_0.

2) Строится система пробных точек (обычно 5-8 точек): $X^{пр(i)} = X^k + r_k\xi^i$, здесь k - номер итерации, ξ^k - случайный вектор единичной длины, i - номер пробной точки.

Построенные пробные точки оказываются лежащими на гиперсфере радиуса r_k (в случае двух переменных – на окружности радиуса r_k).

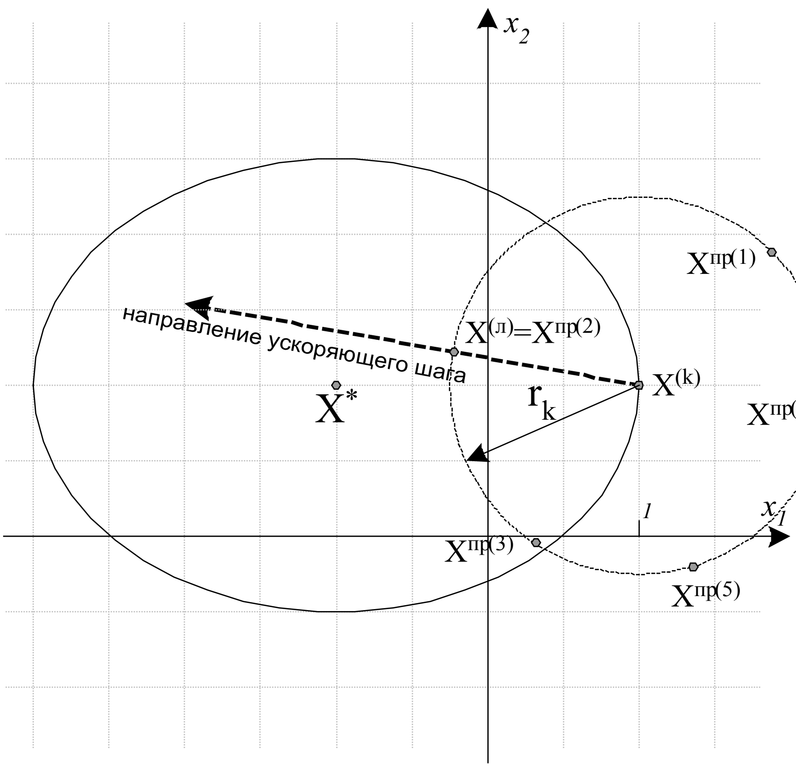
Для каждой пробной точки вычисляется значение функции $f(X^{пр(i)})$.

№ точки	x	y	f(X)
1			
2			
…..			
8			

3) Из полученного набора выбирается наилучшая точка $X^{(л)}$, для которой $f(X^{(л)}) = \min\left[f(X^{пр(i)})\right]$. Выбор осуществляется пользователем.

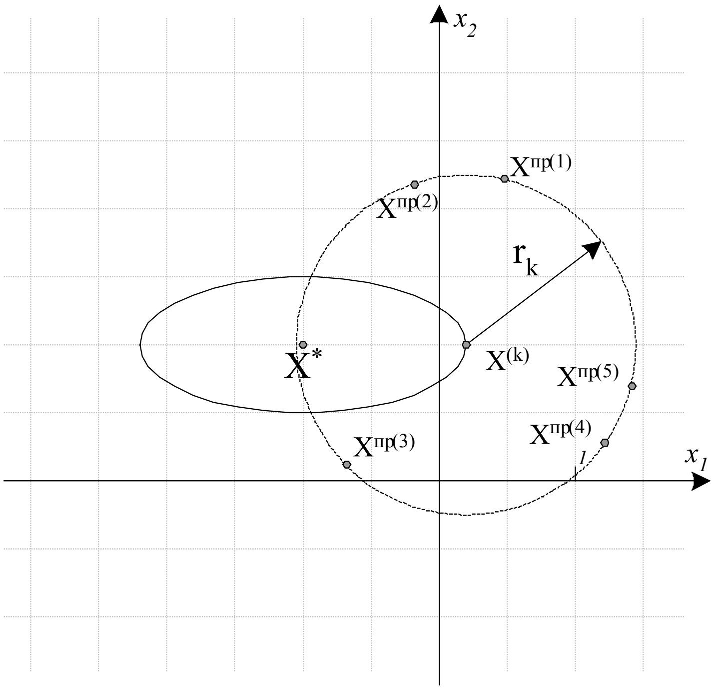
4) Проверяется условие: $f(X^{(л)}) < f(X^k)$:

- если условие выполнено, то система пробных точек считается удачной, далее возможно два продолжения алгоритма:
  - 4.1) $X^{k+1} = X^{(л)}$
  - 4.2) в направлении, соединяющем точки X^k и $X^{(л)}$ делается ускоряющий шаг: $X^{k+1} = X^{(л)} + \lambda(X^{(л)} - X^{(k)})$, в этом случае, если оказывается, что $f(X^{k+1}) \ge f(X^k)$, принимается $X^{k+1} = X^{(л)}$

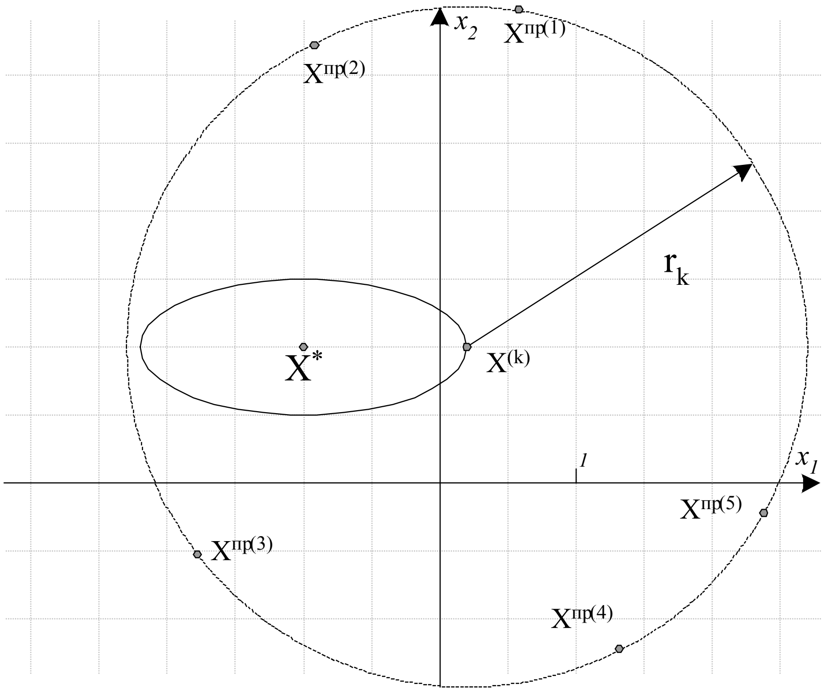


Удачная система пробных точек

- если условие не выполняется, делается попытка построить новую удачную систему пробных точек. Если при этом пробная окружность целиком накрывает текущую линию уровня, текущий радиус r_k должен быть уменьшен.



Неудачная система пробных точек (возможна повторная попытка)



Неудачная система пробных точек (необходимо уменьшить радиус)

5) Процедура 2)-4) повторяется до выполнения критерия окончания счета.

<u>Основной критерий окончания метода</u>: $r_k \le \varepsilon$

<u>Начальные параметры метода:</u> $X^0, \ \varepsilon$, начальное значение радиуса r_0.

<u>Изменяемый параметр метода</u>: величина радиуса r_k .