ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

«ПРИКДАДНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ:

- Задача об аренде партии верблюдов
- Задача о выборе транспортных средств

СОДЕРЖАНИЕ И ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ:

1. Отчет по лабораторной работе выполняется после выполнения лабораторной работы **в отдельной тетради вручную**. Отчет должен быть у **каждого студента**, даже если работа выполнялась бригадой.

2. **Обложка тетради**, должна содержать наименование лабораторной работы, наименование дисциплины, фамилию и группу студента.

3. **По каждой решенной в работе задаче в отчете должны содержать следующие разделы**:

(1) Текстовая постановка прикладной задачи.

(2) Выбранные параметры.

(3) Математическая модель задачи.

(4) **Графическое решение, если задача имеет 2 переменные (графическое решение выполняется вручную на миллиметровке формата А4 (масштаб по осям 1:1). (См. алгоритм и примеры)**

На графике должны быть:

- подписаны оси координат;
- указаны единицы масштаба;
- **выделено цветом** множество допустимых решений;
- построен вектор градиента в точке (0,0) (не схематично, а с соблюдением координат и масштаба);
- построена линия уровня целевой функции, проходящая через точку (0, 0);
- обоснованно указано решение задачи на основании графика, с приведением координат оптимального решения и оптимального значения функции.

(5) Подготовка задачи к решению (переход к канонической задаче, переход к М-задаче и т.д.).

(6) Решение табличным симплекс методом и/или методом Гомори (приводимое решение должно содержать все таблицы и комментарии к ним). Таблицы могут быть распечатаны и вклеены в отчет.

(7) **Соответствующая двойственная задача к прямой задаче максимизации (без учета целочисленности) и ее решение, а в случае когда двойственная задача имеет две переменные, дополнительно графическое решение двойственной задачи (графическое решение выполняется вручную на миллиметровке формата А4 (масштаб по осям 1:1).**

(8) Выводы и рекомендации.

ПРОЦЕДУРА ЗАЩИТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Индивидуальная беседа по отчету.
2. Заключительное тестирование (к тестированию допускаются студенты по итогам беседы по отчету).

УСЛОВИЯ ЗАЩИТЫ: оценка хорошо или отлично за заключительный тест.

АЛГОРИТМ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Построить множество допустимых решений, задаваемое ограничениями.

2. Построить градиент целевой функции в точке $(0, 0)^T$.

3. Построить линию уровня целевой функции, проходящую через точку $(0, 0)^T$.

Если, построенная линия уровня не имеет общих точек с множеством допустимых решений, то, используя параллельный перенос, построить еще одну линию уровня функции, пересекающую множество допустимых решений. Линию уровня, имеющую общие точки с множеством допустимых решений, отметим $\oplus$.

4. Для поиска максимума целевой функции переносить, используя параллельный перенос, построенную линию уровня $\oplus$ в направлении градиента до последнего касания с множеством допустимых решений. В точке (точках) касания достигается условный максимум. Если множество допустимых решений в направлении градиента неограниченное, то максимума в задаче нет.

Для поиска минимума целевой функции аналогично переносить построенную линию уровня $\oplus$ в направлении, противоположном градиенту, до последнего касания с множеством допустимых решений. В точке (точках) касания достигается условный минимум. Если множество допустимых решений в направлении, противоположном градиенту, неограниченное, то минимума в задаче нет.

Пример 1.

Дано: $f(X) = -x_1 + 3x_2 \to \text{extr}$

$$-x_1 + x_2 \le 1, \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \le 4, \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \quad (3)$$

Найти решение задачи графически.

Решение:

1. Для графического решения задачи построим множество допустимых решений, задаваемое ограничениями (1)-(3).

Ограничение (1) в задаче определяется прямой $-x_1 + x_2 = 1$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	1
-1	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку $(0, 0)^T$, так как при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получается верное неравенство: $-0 + 0 \le 1$.

Ограничение (2) в задаче определяется прямой $2x_1 + x_2 = 4$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	4
2	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку $(0, 0)^T$, так как при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается верное неравенство: $2 \cdot 0 + 0 \le 4$.

Ограничения (3) в задаче задают 1-ю четверть координатной плоскости.

Множество допустимых решений включает все точки, в которых ограничения выполняются одновременно. Отметим крайние точки получившегося множества: ***O, A, B, C*** (рис. 1.)**.**

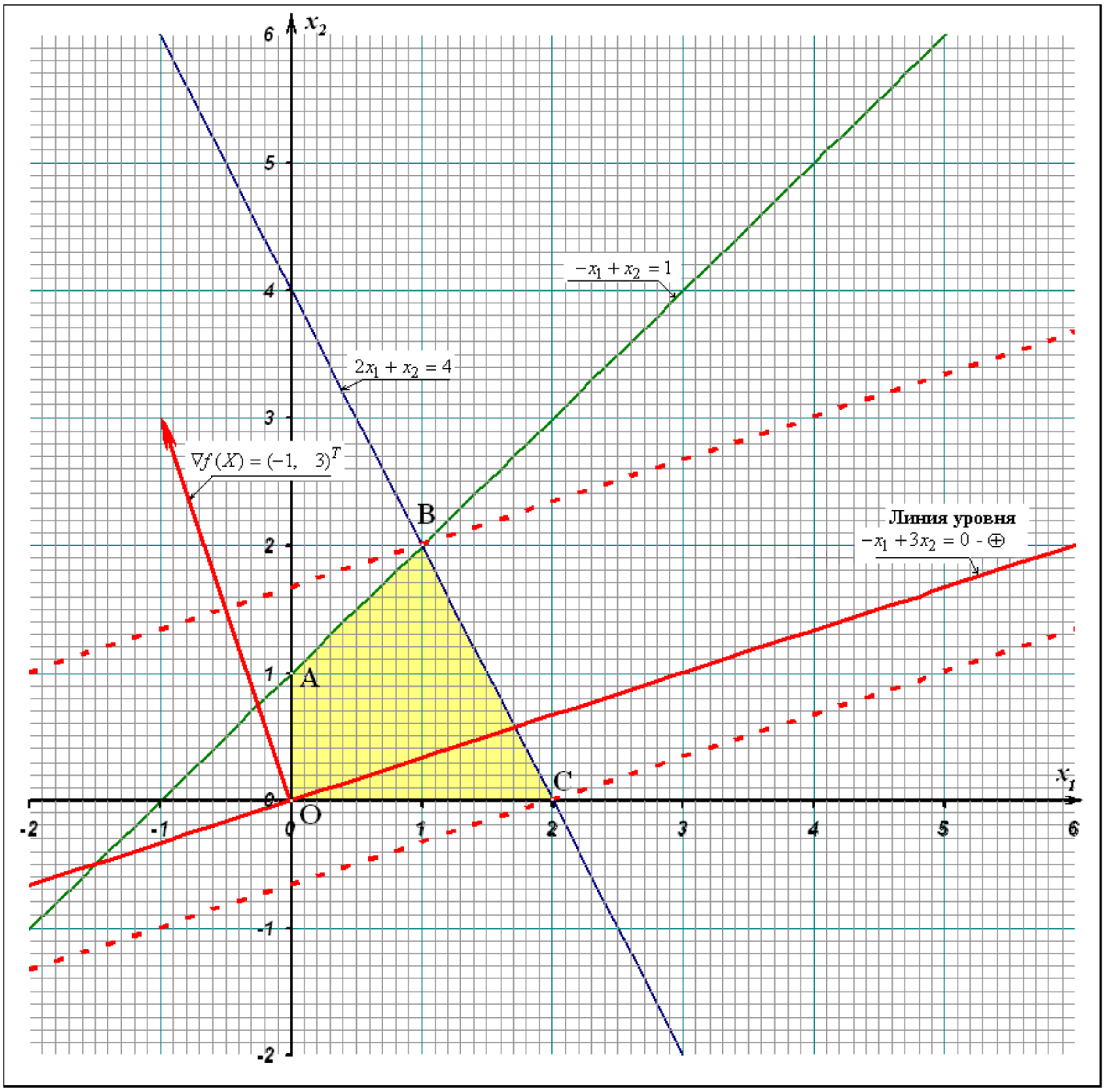

Рис. 1.

2. Построим градиент функции $\nabla f(X) = (-1,\ 3)^T$ в точке $(0, 0)^T$ (рис. 1.).

3. Построим линию уровня функции $f(X) = C$, проходящую через точку $(0, 0)^T$. Для этого найдем значение константы C, подставив координаты точки в целевую функцию:

$C=-0+3\cdot 0=0$, и затем построим прямую $-x_1+3x_2=0$. Заметим, что построенная прямая перпендикулярна градиенту (рис. 1.).
Построенная линия уровня пересекает множество допустимых решений, отметим ее $\oplus$ (рис. 1.).

4. Будем искать точку максимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии $\oplus$ в направлении градиента функции. Как видно из чертежа, это точка $B=(1,\ 2)^T$ (соответствующая линия уровня изображена штриховой линией). Таким образом, получено решение задачи поиска максимума функции:

$$x_1^*=1,$$
$$x_2^*=2,$$
$$f(X_{\max}^*)=-1+3\cdot 2=5.$$

Будем искать точку минимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии $\oplus$ в направлении, противоположном градиенту функции. Как видно из чертежа, это точка $C=(2,\ 0)^T$ (соответствующая линия уровня изображена штриховой линией). Таким образом, получено решение задачи поиска минимума функции:

$$x_1^*=2,$$
$$x_2^*=0,$$
$$f(X_{\min}^*)=-2+3\cdot 0=-2.$$

Пример 2.

<u>Дано</u>: $f(X)=4x_1+x_2 \to \text{extr}$

$$-x_1+x_2\le 1, \qquad (1)$$
$$2x_1+x_2\ge 4, \qquad (2)$$
$$x_1, x_2\ge 0. \qquad (3)$$

Найти решение задачи графически.

<u>Решение</u>:

1. Для графического решения задачи построим множество допустимых решений, задаваемое ограничениями (1)-(3).
Ограничение (1) в задаче определяется прямой $-x_1+x_2=1$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	1
−1	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и будет содержать точку $(0,0)^T$, так как при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получается верное неравенство: $-0+0\le 1$.

Ограничение (2) в задаче определяется прямой $2x_1+x_2=4$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	4
2	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и **НЕ** будет содержать точку $(0,0)^T$, так как при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается неверное неравенство: $2\cdot 0+0\geq 4$.

Ограничения (3) в задаче задают 1-ю четверть координатной плоскости.

Множество допустимых решений включает все точки, в которых ограничения выполняются одновременно. Отметим крайние точки получившегося множества: ***A, B*** (рис. 2.)**.**

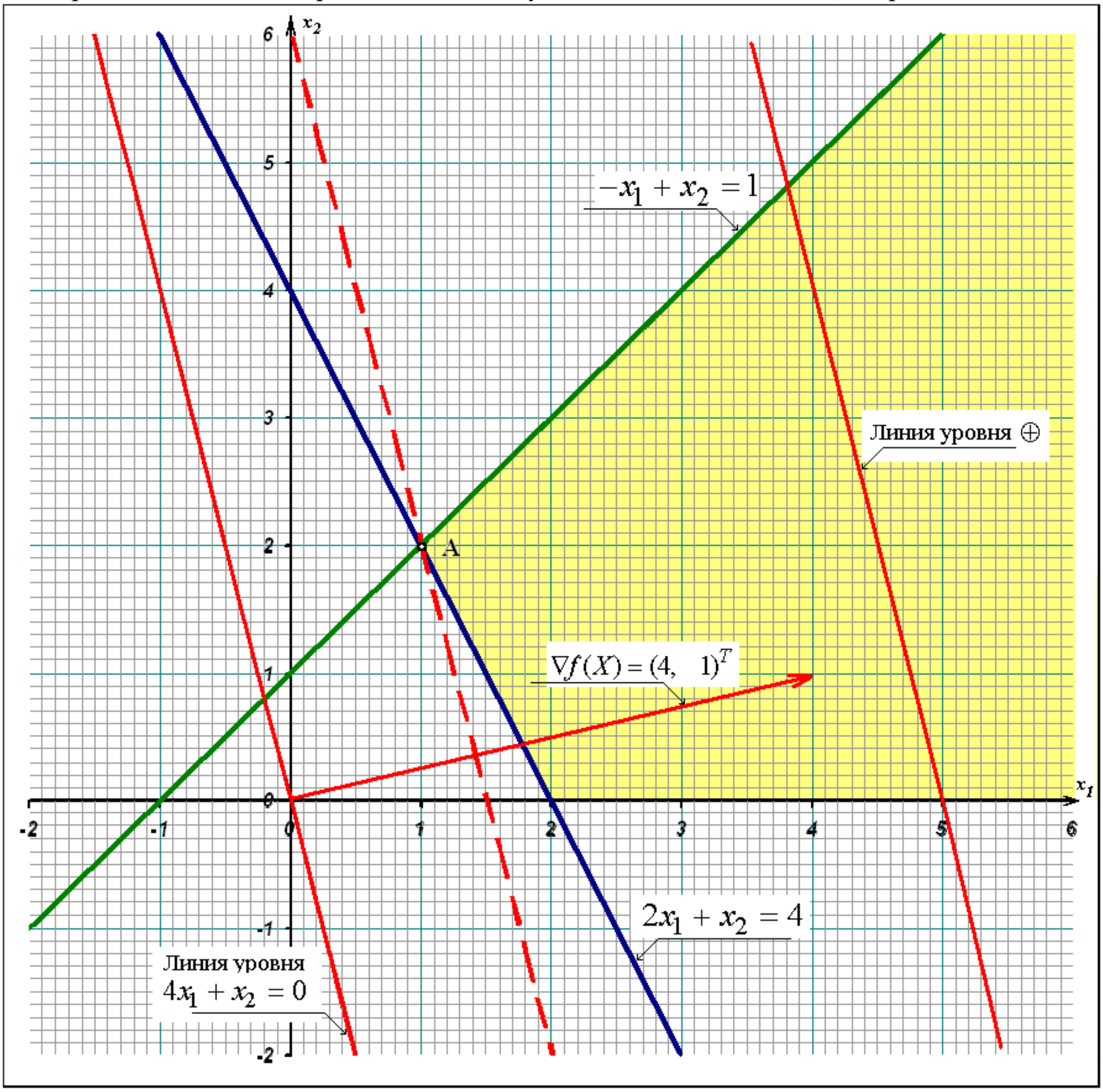

Рис. 2.

2. Построим градиент функции $\nabla f(X)=(4,1)^T$ в точке $(0,0)^T$ (рис. 2.).

3. Построим линию уровня функции $f(X)=C$, проходящую через точку $(0, 0)^T$. Для этого найдем значение константы C, подставив координаты точки в целевую функцию: $C = 4 \cdot 0 + 0 = 0$, и затем построим прямую $4x_1 + x_2 = 0$. Заметим, что построенная прямая перпендикулярна градиенту (рис. 2.).
Построенная линия уровня не имеет общих точек с множеством допустимых решений. Используя параллельный перенос, построим еще одну линию уровня функции, пересекающую множество допустимых решений, и отметим ее $\oplus$ (рис. 2.).

4. Будем искать точку максимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии $\oplus$ в направлении градиента функции. Как видно из чертежа, такой точки не существует, так как множество допустимых решений в направлении градиента неограниченное, следовательно, максимума в задаче нет.

Будем искать точку минимума функции как последнюю точку касания линии уровня и множества допустимых решений при параллельном переносе линии $\oplus$ в направлении, противоположном градиенту функции. Как видно из чертежа, это точка $A = (1,\ 2)^T$ (соответствующая линия уровня изображена штриховой линией). Таким образом, получено решение задачи поиска минимума функции:

$$x_1^* = 1,$$

$$x_2^* = 2,$$

$$f(X_{\min}^*) = 4 \cdot 1 + 2 = 6.$$