ЛЕКЦИЯ (последняя)

Численные методы решения задачи Коши

Численные методы позволяют найти только частное решение ДУ (СДУ) в виде сеточной функции. Несмотря на этот недостаток, эти методы применимы к очень широкому классу уравнений, поэтому при современном уровне развития вычислительной техники численные методы стали одним из основных методов решения практических задач, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями.

Численные методы решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка

Дано: $y' = f(x, y)$ - ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной,

$y(x_0) = y_0$ - начальное условие, здесь x_0- начальная точка, y_0- значение функции в начальной точке.

Требуется решить поставленную задачу Коши – найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Методы численного решения задачи Коши связаны с разложением искомого решения ДУ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, при этом решение задачи ищется на интервале $[x_0, x_N]$, левый конец которого x_0 задан, а правый конец x_N может быть либо задан, либо определен в процессе расчетов некоторым условием.

Искомое приближенное решение ищется в отдельных точках $x_1, x_2, .., x_k, ...$ интервала, называемых узлами сетки, в виде последовательности значений $y_1, y_2, .., y_k, ...$, приближенно равных значениям $y(x_1), y(x_2), .., y(x_k), ...$, определяемым точным решением $y(x)$.

Расстояние между соседними узлами называется шагом интегрирования h: $h = x_{k+1} - x_k$. Шаг может быть задан заранее или может меняться в ходе вычислений. Чаще всего

$$x_k = x_0 + k \cdot h, \quad k = 0,1,.., N; \quad h = \frac{x_N - x_0}{N}.$$

Рассмотрим разложение решения в ряд Тейлора:

$$y(x) \approx y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}h^3 + ... + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + ...$$

Стоящие в правой части производные искомой функции можно найти, дифференцируя исходное уравнение:

$$y(x) \approx y(x_0) + \frac{f(x_0, y_0)}{1!}h + \frac{f'(x_0, y_0)}{2!}h^2 + \frac{f''(x_0, y_0)}{3!}h^3 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0, y_0)}{n!}h^n + ...$$

Однако, даже при сравнительно простой правой части выражения для производных могут оказаться громоздкими, поэтому для численного решения ограничиваются только несколькими членами ряда.

Явный метод Эйлера

Ограничимся только двумя первыми членами ряда Тейлора: $y(x) \approx y(x_0) + \dfrac{f(x_0, y_0)}{1!} h$.

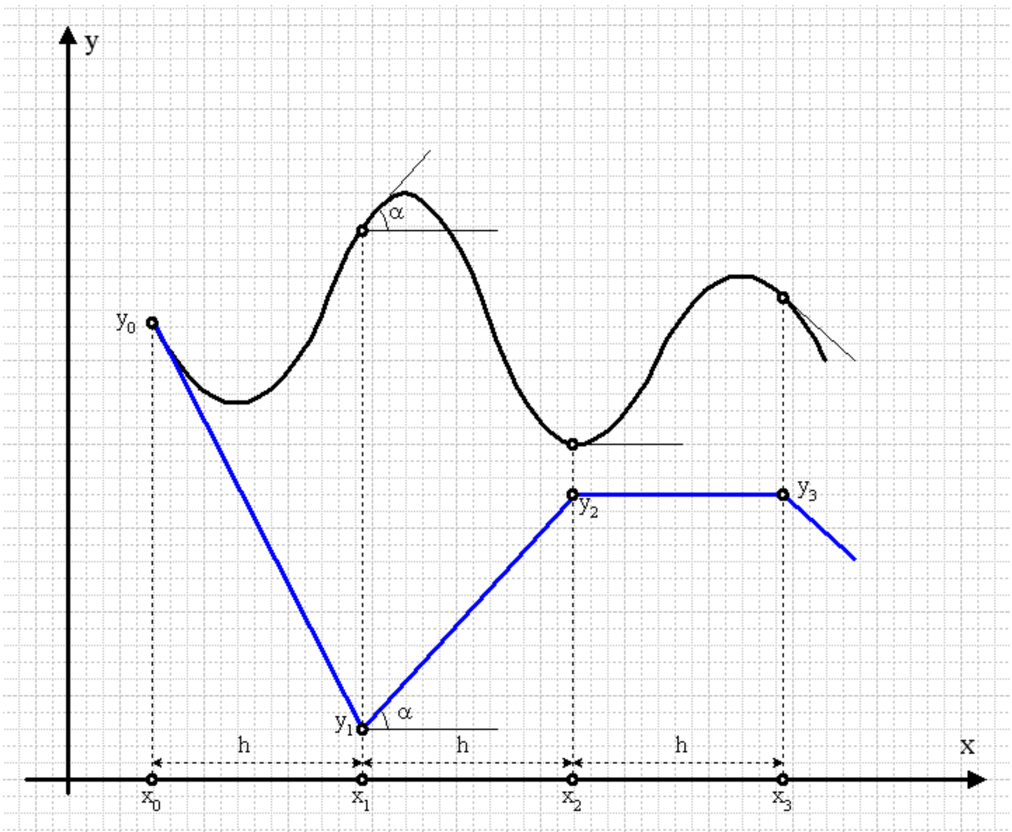
Тогда получим формулы для вычисления решения:

$$\boxed{\begin{aligned} & x_{i+1} = x_i + h \\ & y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ & i = 0, 1, 2... \end{aligned}}$$

Очевидно, что для отыскания решения в этом случае достаточно знать только начальные условия и h.

Геометрическая интерпретация метода

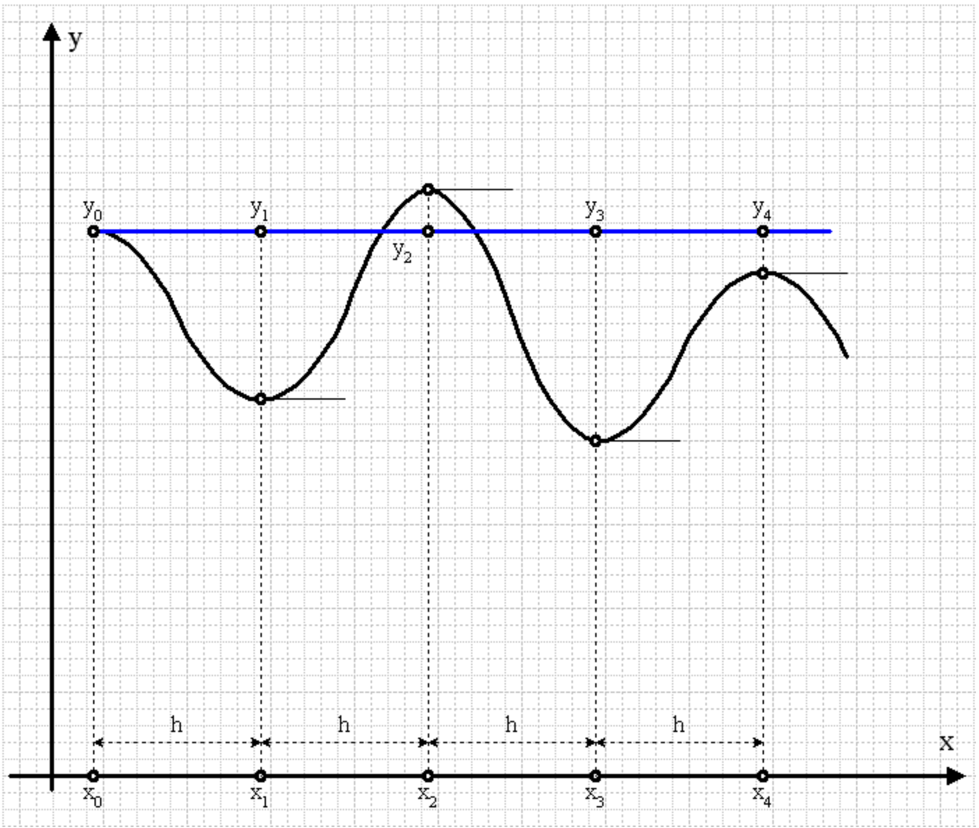
Согласно вычислительной схеме метода Эйлера, искомое решение (интегральная кривая) $y = y(x)$, проходящая через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$, приближенно заменяется ломанной $M_0, M_1, M_2...$, звенья которой в каждой вершине имеют направление, совпадающее с направлением интегральной кривой.



Ломаная Эйлера

Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Его недостатками являются:

1) малая точность;
2) «запаздывание»;
3) систематическое накопление ошибок.



Пример неудачного задания шага для решения задачи методом Эйлера

Метод Эйлера дает сравнительно удовлетворительные результаты (в смысле погрешности) лишь при малых значениях h, это можно объяснить тем, что интеграл дифференциального уравнения на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представим только двумя членами ряда, т.о. для каждого отрезка имеется погрешность порядка h^2.

Пример 6.6.

Дано: $y' + y \cdot tg\, x = \cos x, \qquad y(0) = 2.$

Найти решение задачи Коши явным методом Эйлера на отрезке $[0,1]$. Число разбиений отрезка выбрать $N = 2$.

Решение

Перепишем задачу: $y' = \underbrace{-\text{tg}\, x \cdot y + \cos x}_{f(x,y)}$, $\qquad x_0 = 0, \quad y_0 = 2$.

Число разбиений отрезка $N = 2$, тогда шаг для вычислений $h = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Итерация 0 (начальная точка)

$x_0 = 0$,

$y_0 = 2$,

$f(x_0, y_0) = -\text{tg}(0) \cdot 2 + \cos(0) = 1$.

Итерация 1 ($i = 0$ **)**

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$,

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 0{,}5 \cdot 1 = 2{,}5$,

$$f(x_1, y_1) = -\text{tg}(0,5) \cdot 2,5 + \cos(0,5) = -0,4881.$$

<u>Итерация 2</u> ($i = 1$)

$$x_2 = x_1 + h = 0,5 + 0,5 = 1,$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2,5 + 0,5 \cdot (-0,4881) = 2,2559.$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2,5 + 0,5 \cdot (-0,4881) = 2,2559.$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы.

Число разбиений, шаг	№ итерации	x	y
$N = 2$, $h = 0,5$	0	0	2
	1	0,5	2,5
	2	1	2,2559

Неявный метод Эйлера

Согласно методу последовательные значения искомой функции определяются по формуле:

$$\boxed{\begin{aligned} &x_{i+1} = x_i + h, \\ &y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}), \\ &i = 0, 1, 2... \end{aligned}}$$

Здесь искомая величина y_{i+1} входит в обе части равенства.

Пример 6.7.

<u>Дано</u>: $y' + y \cdot tg\, x = \cos x, \qquad y(0) = 2.$

Найти решение задачи Коши неявным методом Эйлера на отрезке $[0,1]$. Число разбиений отрезка выбрать $N = 2$.

<u>Решение</u>:

Перепишем задачу: $y' = \underbrace{-\text{tg}\, x \cdot y + \cos x}_{f(x,y)}, \qquad x_0 = 0, \quad y_0 = 2.$

Для решения задачи запишем формулу для вычисления y_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (-\text{tg}(x_{i+1}) \cdot y_{i+1} + \cos(x_{i+1})),$$

$$y_{i+1} = y_i - h \cdot \text{tg}(x_{i+1}) \cdot y_{i+1} + h \cdot \cos(x_{i+1}),$$

$$y_{i+1} + h \cdot \text{tg}(x_{i+1}) \cdot y_{i+1} = y_i + h \cdot \cos(x_{i+1}),$$

$$y_{i+1} \cdot (1 + h \cdot \text{tg}(x_{i+1})) = y_i + h \cdot \cos(x_{i+1}),$$

$$\boxed{y_{i+1} = \frac{y_i + h \cdot \cos(x_{i+1})}{1 + h \cdot \text{tg}(x_{i+1})}}.$$

Число разбиений отрезка $N = 2$, тогда шаг для вычислений $h = \frac{1}{2} = 0,5$.

<u>Итерация 0 (начальная точка)</u>

$$x_0 = 0, \; y_0 = 2.$$

Итерация 1 ($i=0$ **)**

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}5 = 0{,}5,$$

$$y_1 = \frac{y_0 + h\cdot\cos(x_1)}{1 + h\cdot\mathrm{tg}(x_1)} = \frac{2 + 0{,}5\cdot\cos(0{,}5)}{1 + 0{,}5\cdot\mathrm{tg}(0{,}5)} = 1{,}9155,$$

Итерация 2 ($i=1$ **)**

$$x_2 = x_1 + h = 0{,}5 + 0{,}5 = 1,$$

$$y_2 = \frac{y_1 + h\cdot\cos(x_2)}{1 + h\cdot\mathrm{tg}(x_2)} = \frac{1{,}9155 + 0{,}5\cdot\cos(1)}{1 + 0{,}5\cdot\mathrm{tg}(1)} = 1{,}2288.$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы.

Число разбиений, шаг	№ итерации	x	y
$N=2$ $h=0{,}5$	0	0	2
	1	0,5	1,9155
	2	1	1,2288

Модификации метода Эйлера

Более усовершенствованным является ***метод Эйлера с пересчетом***, при котором сначала вычисляют промежуточные значения:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \qquad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}\cdot f(x_i,\ y_i).$$

и находят значение направления поля интегральных кривых в средней точке:

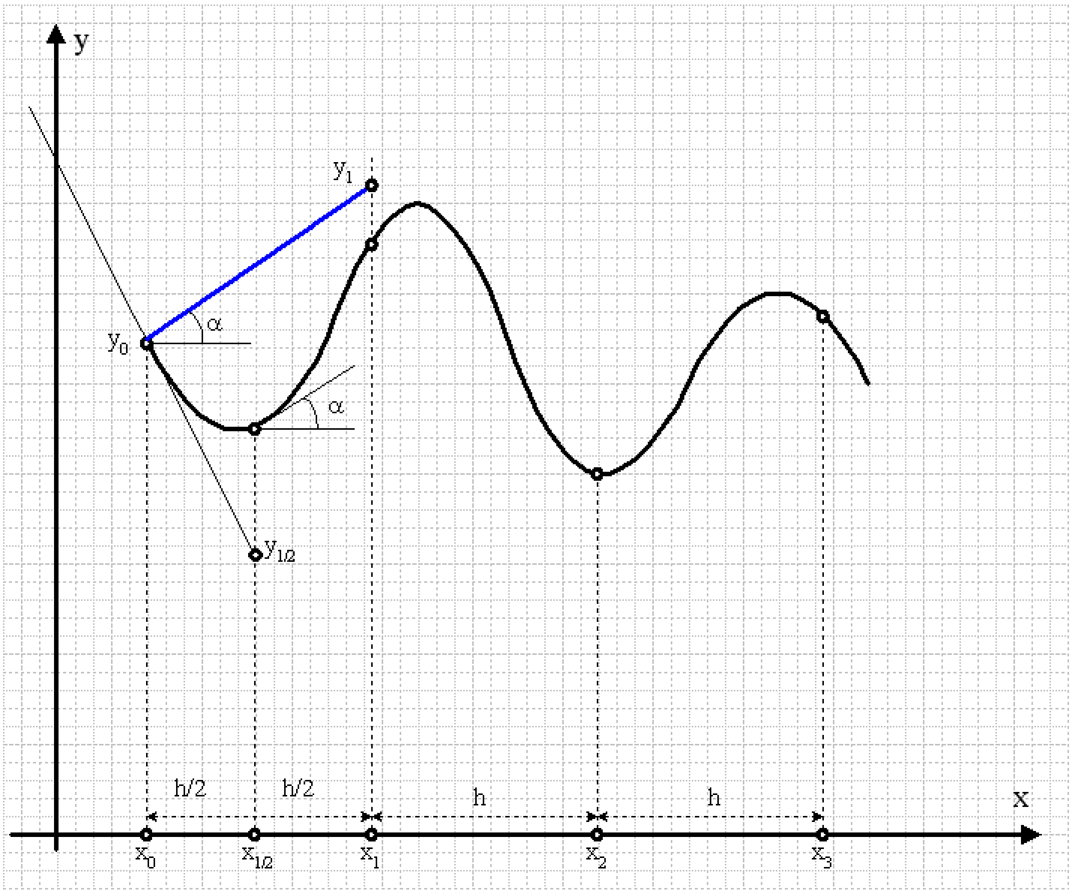
$$f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

Затем полагают: $x_{i+1} = x_i + h, \qquad y_{i+1} = y_i + h\cdot f_{i+\frac{1}{2}}.$

Окончательно:

$$\boxed{\begin{aligned} & x_{i+1} = x_i + h, \\ & y_{i+1} = y_i + h\cdot f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right), \\ & x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \\ & y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}\cdot f(x_i, y_i), \\ & i = 0, 1, 2... \end{aligned}}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера с пересчетом



Другой модификацией метода является ***метод предсказания и коррекции***, при котором сначала определяют «грубое приближение» решения: $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ - «предсказание», исходя из которого находится направление поля интегральных кривых $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \ \tilde{y}_{i+1})$.

Затем приближенно полагают:

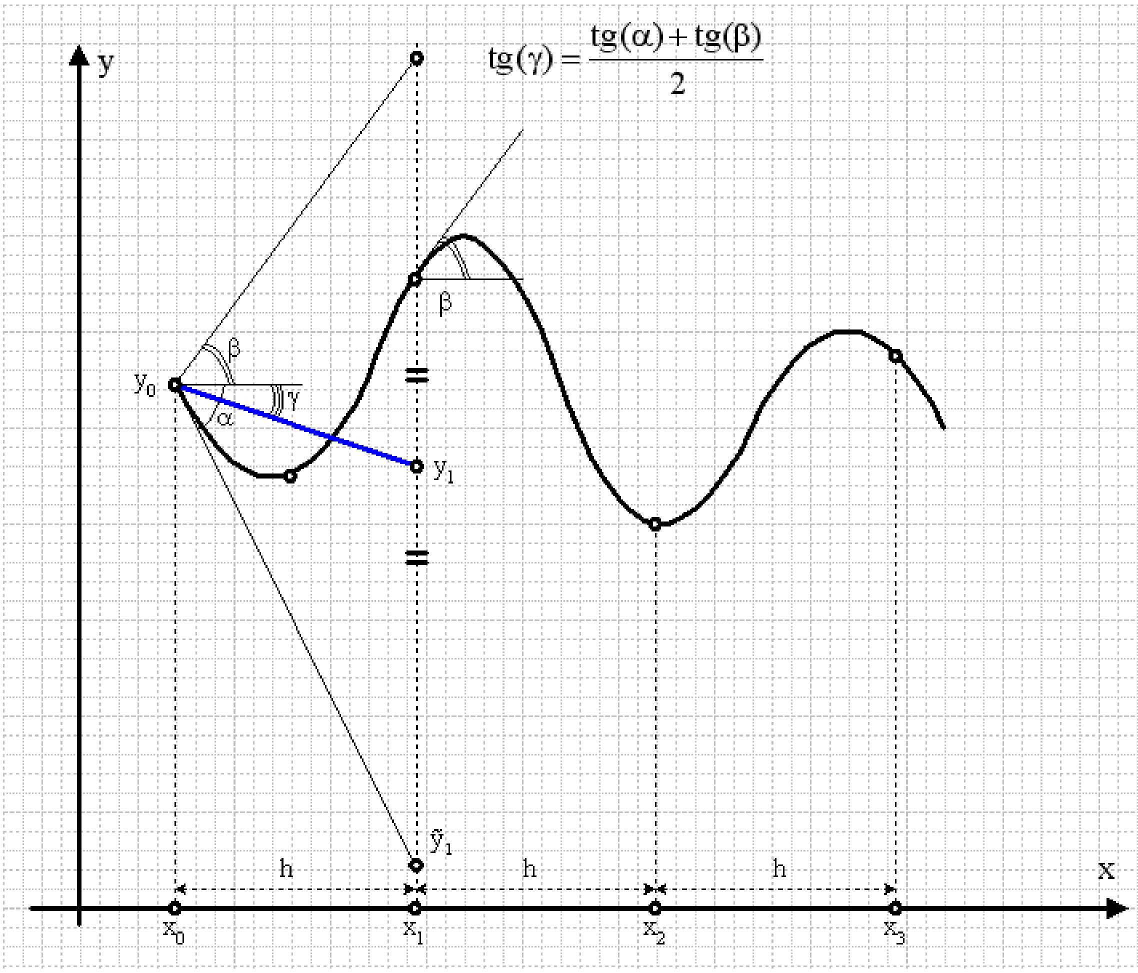
$$x_{i+1} = x_i + h,$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{(f(x_i, \ y_i) + \tilde{f}_{i+1})}{2}$$ - «коррекция».

Окончательно:

$$\boxed{\begin{aligned} & x_{i+1} = x_i + h \\ & y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{2}, \\ & \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ & i = 0, 1, 2... \end{aligned}}$$

Геометрическая интерпретация метода предсказания и коррекции



Погрешность модификаций метода Эйлера на каждом шаге есть величина порядка h^3.

Метод Рунге-Кутты

Согласно методу последовательные значения искомой функции определяются по формуле:

$$x_{i+1} = x_i + h,$$
$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \cdot (k_1^{(i)} + 2 \cdot k_2^{(i)} + 2 \cdot k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i,\ y_i), \qquad k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \qquad k_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h,\ y_i + k_3^{(i)}).$$

Можно доказать, что погрешность этого метода на каждом шаге есть величина порядка h^5.

Метод Рунге-Кутта обладает значительной точностью, и, несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении дифференциальных уравнений с помощью вычислительной техники.

Численные методы решения задачи Коши для ДУ n-го порядка

Дано: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', .., y^{(n-1)})$,

$$y(x_0) = a,$$
$$y'(x_0) = b,$$
$$y''(x_0) = c,$$
$$.......$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = s.$$

Общий алгоритм численного решения задачи Коши для ДУ n-го порядка

I. Перейти от ДУ n-го порядка к нормальной системе ДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', .., y^{(n-1)}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ .... \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2 .... y_{n-1}, y_n). \end{cases}$$

II. Поставить задачу Коши для нормальной системы ДУ n-го порядка:

$$\begin{cases} y(x_0) = a, \\ y'(x_0) = b, \\ y''(x_0) = c, \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = s, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1(x_0) = a, \\ y_2(x_0) = b, \\ y_3(x_0) = c, \\ .... \\ y_n(x_0) = s. \end{cases}$$

III. Записать задачу Коши для нормальной системы ДУ n-го порядка в векторной форме:

$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0$, где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .... \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ .... \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ .... \\ y_n \\ f(x, y, y_1, y_2, y_3 .. y_n \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ .... \\ s \end{pmatrix}.$$

IV. Задать шаг h по оси абсцисс и решать задачу на отрезке $[x_0, x_N]$, используя те же формулы, что и в случае ДУ 1-го порядка. Например, для явного метода Эйлера:

$$\boxed{\begin{aligned} & x_{i+1} = x_i + h, \\ & Y_{i+1} = Y_i + h \cdot F(x_i, y_i), \\ & i = 0, 1, 2... \end{aligned}}$$