Лекция 14

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Численные методы решения задачи Коши для ДУ n-го порядка

Дано: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)})$

$$y(x_0) = a$$
$$y'(x_0) = b$$
$$y''(x_0) = c$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = s$$

Общий алгоритм численного решения задачи Коши для ДУ n-го порядка

I. Перейти от ДУ n-го порядка к нормальной системе ДУ (НСДУ) n-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'' .. y^{(n-1)}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2 \ldots y_{n-1}, y_n) \end{cases}$$

II. Поставить задачу Коши для нормальной системы ДУ n-го порядка:

$$\begin{cases} y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \\ y''(x_0) = c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1(x_0) = a \\ y_2(x_0) = b \\ y_3(x_0) = c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = s \end{cases}$$

III. Записать задачу Коши для нормальной системы ДУ n-го порядка в векторной форме:

$Y' = F(x, Y), \qquad Y(x_0) = Y_0$, где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \qquad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} \qquad F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \ldots \\ y_n \\ f(x, y, y_1, y_2, y_3 .. y_n) \end{pmatrix} \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \ldots \\ s \end{pmatrix}$$

IV. Задать шаг h по оси абсцисс и решать задачу на отрезке $[x_0, x_N]$, используя те же формулы, что и в случае ДУ 1-го порядка. Например, для явного метода Эйлера:

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$Y_{i+1} = Y_i + h \cdot F(x_i, y_i)$$
$$i = 0, 1, 2...$$

Замечание. Аналогично подготавливается задача Коши для численного решения системы ДУ, не являющейся НСДУ.

Пример 1.

Дано: $y'' = y - x^2, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$

Найти решение задачи Коши явным методом Эйлера на отрезке $[0,1]$. Число разбиений отрезка выбрать $N = 2$.

Решение:

I. Разрешим уравнение относительно старшей производной: $y'' = y - x^2$

Введем обозначения: $y'(x) = z(x)$, тогда $\quad y''(x) = z'(x) = y - x^2$

Тогда получим систему: $\begin{cases} y' = z \\ z' = y - x^2 \end{cases}$

II. Запишем начальные условия для системы: $\begin{matrix} y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{matrix}$

III. Запишем полученную задачу Коши в векторной форме.

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(0) = Y_0, \text{ где}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \qquad Y' = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}, \qquad F(x, Y) = \begin{pmatrix} z \\ y - x^2 \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV. Решим задачу методом Эйлера на отрезке $[0, 1]$ при $N = 2$

$N = 2, \qquad h = \dfrac{1-0}{2} = 0.5$ - шаг метода Эйлера

Итерация 0 (нач. точка)	$x_0 = 0$ $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $F_0(x_0, Y_0) = \begin{pmatrix} z_0 \\ y_0 - x_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 - 0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Итерация 1

$(i = 0)$

$$x_1 = x_0 + 0.5 = 0 + 0.5 = 0.5$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = Y_0 + 0.5 \cdot F_0(x_0, Y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1(x_1, Y_1) = \begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 - x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 - 0.5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Итерация 2

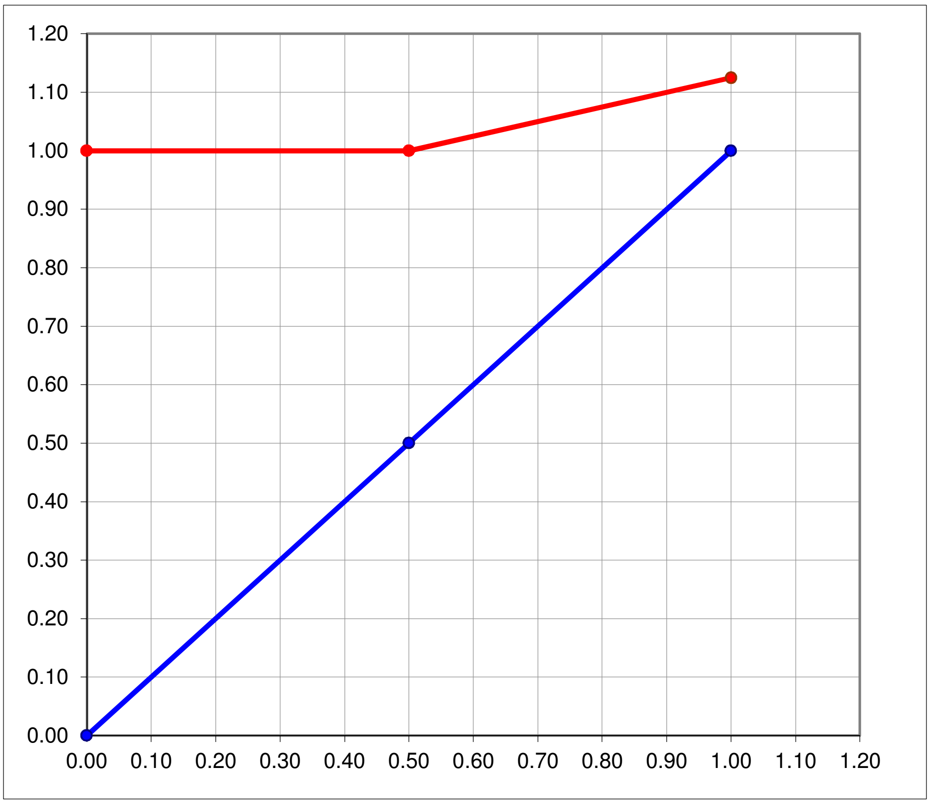
$(i = 1)$

$$x_2 = x_1 + 0.5 = 0.5 + 0.5 = 1$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = Y_1 + 0.5 \cdot F_1(x_1, Y_1) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.125 \end{pmatrix}$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы:

№ итерации	x	y	$y'(x) = z$
0	0	0	1
1	0.5	0.5	1
2	1	1	1.125



Пример расчета в СКМ Maple

```
>

restart;
a := 0; b := 1; y0 := 0; z0 := 1;
n := 2;

f1 := (x, y, z) → evalf(z);
f2 := (x, y, z) → evalf(y − x^2);

h := (b-a)/n;

X := array[0 ..n]; Y := array[0 ..n]; Z := array[0 ..n];

X[0] := a; Y[0] := y0; Z[0] := z0;

print("x=", X[0], " y=", Y[0], " z=", Z[0]);

for i from 0 to n-1 do

X[i + 1] := X[i] + h;
Y[i + 1] := Y[i] + h* (f1(X[i], Y[i], Z[i]));
Z[i + 1] := Z[i] + h* (f2(X[i], Y[i], Z[i]));

print("x=", X[i + 1], " y=", Y[i + 1], " z=", Z[i + 1]);
end do:
```

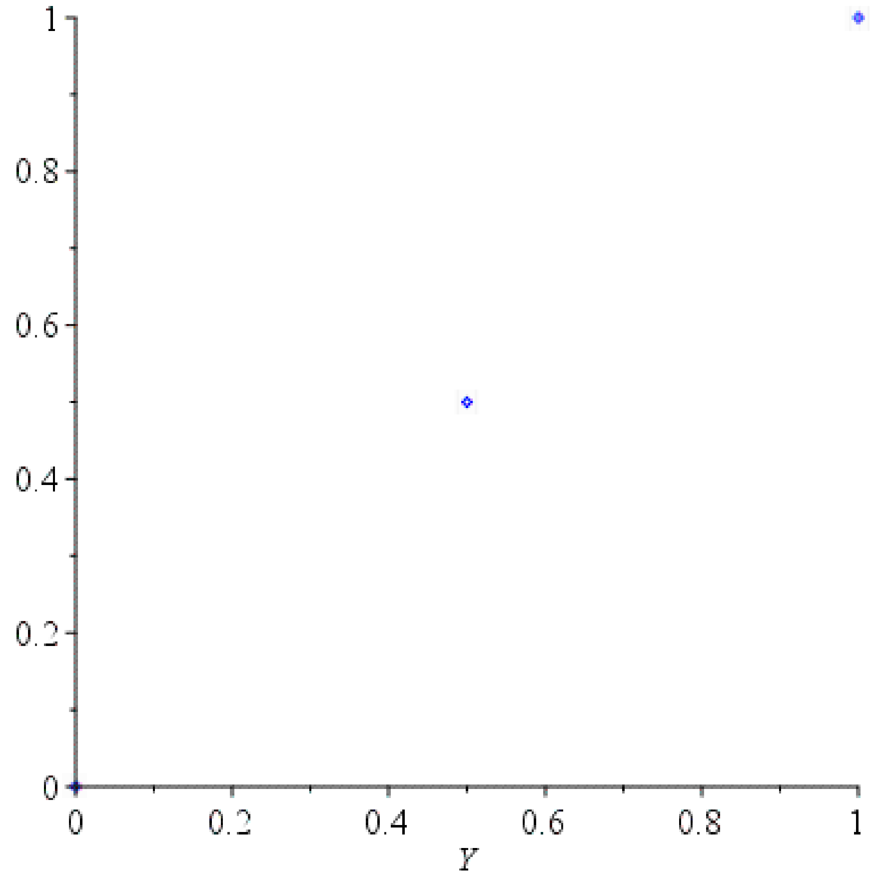
$$a := 0$$
$$b := 1$$
$$y0 := 0$$
$$z0 := 1$$
$$n := 2$$
$$f1 := (x, y, z) \mapsto evalf(z)$$
$$f2 := (x, y, z) \mapsto evalf\left(-x^2 + y\right)$$
$$h := \frac{1}{2}$$
$$X := array_{0\,..2}$$
$$Y := array_{0\,..2}$$
$$Z := array_{0\,..2}$$
$$X_0 := 0$$
$$Y_0 := 0$$
$$Z_0 := 1$$

"x=", 0, " y=", 0, " z=", 1

"x=", $\frac{1}{2}$, " y=", 0.5000000000, " z=", 1.

"x=", 1, " y=", 1.000000000, " z=", 1.125000000

```
> plots[pointplot]({seq([X[i], Y[i]], i = 0 ..n)}, color = blue)
```



> $plots[pointplot](\{seq([X[i], Z[i]], i = 0..n)\}, color = red)$