Лекция №12 (дополнительная)

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (СЛНДУ)

Определение. Системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛНДУ) n-го порядка называется СДУ вида:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t) \\ \ldots\ldots \\ \dot{y}_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{cases}$$

Решение СЛНДУ может быть найдено методом вариации произвольных постоянных, а в случае, если функции $f_j(t)$ имеют специальный вид – методом подбора частного решения.

Решение СЛНДУ методом вариации произвольных постоянных

Алгоритм решение СЛНДУ методом вариации произвольных постоянных

1. Решить соответствующую СЛОДУ, записать её общее решение.

2. В полученном решении заменить произвольные постоянные C_j на неизвестные функции $C_j(t)$

3. Подставить полученное решение в исходную СЛНДУ, получится система алгебраических уравнений относительно $\dot{C}_j$.

4. Решить систему, найти: $\dot{C}_j$.

5. Найти $C_j(t)$, проинтегрировав $\dot{C}_j$: $C_j(t) = \int \dot{C}_j(t)dt + \tilde{C}_j$

6. Подставить полученные выражение в решение из п. 2. Получится решение СЛНДУ.

Пример 1.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

Решить СЛНДУ методом вариации произвольных постоянных.

Решение:

1. Решаем ЛОДУ вида: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$.

Составим матрицу коэффициентов системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу $A - \lambda E : A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ и найдем собственные значения матрицы: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, действительные.

Найдем собственные вектора матрицы и запишем решение СЛОДУ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3 \cdot t}$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{3t} \\ y = -C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{3t} \end{cases}$$

2. В полученном решении заменим произвольные постоянные на неизвестные функции:

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cdot e^t + C_2(t) \cdot e^{3t} \\ y = -C_1(t) \cdot e^t + C_2(t) \cdot e^{3t} \end{cases}$$

3. Подставим полученное решение в исходную СЛНДУ.

Для этого найдем сначала производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$:

$$\dot{x} = \dot{C}_1 \cdot e^t + C_1(t) \cdot e^t + \dot{C}_2 \cdot e^{3t} + 3C_2(t) \cdot e^{3t}$$

$$y = -\dot{C}_1 \cdot e^t - C_1(t) \cdot e^t + \dot{C}_2 \cdot e^{3t} + 3C_2(t) \cdot e^{3t}$$

После подстановки получим: $\begin{cases} \dot{C}_1 \cdot e^t + \dot{C}_2 \cdot e^{3t} = 0 \\ -\dot{C}_1 \cdot e^t + \dot{C}_2 \cdot e^{3t} = -3e^{4t} \end{cases}$

Это система алгебраических уравнений с неизвестными $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$.

4. Решаем систему: $\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{3}{2} \cdot e^{3t} \\ \dot{C}_2 = -\frac{3}{2} e^t \end{cases}$.

5. Найдем функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$: $\begin{cases} C_1(t) = \int \frac{3}{2} \cdot e^{3t} dt = \frac{1}{2} e^{3t} + C_1 \\ \dot{C}_2 = \int -\frac{3}{2} e^t dt = -\frac{3}{2} e^t + C_2 \end{cases}$

6. Подставим найденные функции в решение из пункта 2:

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{2} e^{3t} + C_1\right) \cdot e^t + \left(-\frac{3}{2} e^t + C_2\right) \cdot e^{3t} \\ y = -\left(\frac{1}{2} e^{3t} + C_1\right) \cdot e^t + \left(-\frac{3}{2} e^t + C_2\right) \cdot e^{3t} \end{cases}$$

Получим: $\begin{cases} x = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{3t} - e^{4t} \\ y = -C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{3t} - 2e^{4t} \end{cases}$

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{3t} - e^{4t} \\ y = -C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{3t} - 2e^{4t} \end{cases}}$

Решение СЛНДУ со специальными правыми частями методом подбора частного решения

В случаях, когда неоднородности в правых частях уравнений СЛНДУ имеют специальный вид:

$f_j(t) = \sum P_m(t) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ \text{или} \\ \sin(\beta t) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha t}$ может быть применен метод подбора частного решения.

Рассмотрим подробнее структуру слагаемых правой части ДУ: $P_m(t) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ \text{или} \\ \sin(\beta t) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha t}$, здесь

- $P_m(t) = p_o + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \ldots + p_m t^m$ - многочлен по целым, неотрицательным степеням t степени m.
- $\begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ \text{или} \\ \sin(\beta t) \end{bmatrix}$ - необязательный множитель

Алгоритм решение СЛНДУ со специальными правыми частями методом подбора частного решения

1. Решить соответствующую СЛОДУ, записать её общее решение.

2. Для каждого слагаемого в правой части каждого уравнения выписать параметры:

$\boxed{m}$ - максимальная степень t в многочлене $P_m(t)$, если слагаемое не содержит t, то $m = 0$;

$\boxed{\beta}$ - коэффициент при t в аргументе $\cos(\beta t)$ или $\sin(\beta t)$, если слагаемое не содержит ни $\cos(\beta t)$, ни $\sin(\beta t)$, то $\beta = 0$;

$\boxed{\alpha}$ - коэффициент при t в аргументе экспоненты, если слагаемое не содержит экспоненты, то $\alpha = 0$.

3. Сгруппировать слагаемые с одинаковыми парами (α, β) для каждого уравнения, для сформированной группы выписать параметры: максимальное из m и общие β и α. Каждое из несгруппированных слагаемых представляет собой отдельную группу со своими параметрами.

4. Сгруппировать слагаемые с одинаковыми парами (α, β) для всех уравнений, для сформированной группы выписать параметры: максимальное из m и общие β и α.

5. Для каждой выделенной группы записать структуру частного решения по следующему правилу:

а) если $\beta = 0$, то $\boxed{Y_{част} = Q_{m+s}(t) \cdot e^{\alpha \cdot t}}$, где

$\underline{Q_{m+s}(t)}$ - вектор многочленов по целым, неотрицательным степеням t степени $m+s$ в общем виде, здесь

$\boxed{m}$ - параметр группы;

$\boxed{\alpha}$- коэффициент при t в аргументе экспоненты является параметром группы;

$\boxed{s}$ - определяется следующим образом: если величина $(\alpha + i\beta)$, составленная из параметров группы совпадает с корнями λ характеристического уравнения из п.1 , то s равняется числу совпадений, если же величина $(\alpha + i\beta)$ среди корней λ характеристического уравнения не встречается, то $s = 0$.

б) если $\beta \neq 0$, то $\boxed{Y_{част} = \left[Q_{m+s}(t)\cdot\cos(\beta t) + R_{m+s}(t)\cdot\sin(\beta t)\right]\cdot e^{\alpha\cdot t}}$, где

$Q_{m+s}(t)$, $R_{m+s}(t)$ - векторы многочленов по целым, неотрицательным степеням t степени $m+s$ в общем виде с разными коэффициентами, здесь

$\boxed{m}$ - параметр группы;

$\boxed{\alpha}$- коэффициент при t в аргументе экспоненты является параметром группы;

$\boxed{\beta}$ - коэффициент при t в аргументе $\cos(\beta t)$ и $\sin(\beta t)$ является параметром группы;

- определяется как и в случае а).

6. Определить значения неизвестных коэффициентов методом неопределенных коэффициентов.

7. Записать решение СЛНДУ как сумму решения СЛОДУ и всех частных.

Пример 2.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

Решить СЛНДУ методом подбора частного решения.

Решение:

1. Решаем ЛОДУ вида: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$

Она имеет решение вида: $\begin{cases} x = C_1\cdot e^{t} + C_2\cdot e^{3t} \\ y = -C_1\cdot e^{t} + C_2\cdot e^{3t} \end{cases}$ (см. пример 1.)

2. Исследуем структуру неоднородности в каждом уравнении исходной системы.

Первое уравнение не содержит неоднородности.

Второе уравнение содержит неоднородность $f_2(t) = -3e^{4t}$ с параметрами $\alpha = 4 \quad \beta = 0 \quad m = 0$.

3,4. Группировки по уравнениям нет.

5. Сформируем столбец частного решения по параметрам: $\alpha = 4 \quad \beta = 0 \quad m = 0$:

$$\alpha + i\beta = 4 + i\cdot 0 = 4 \quad \to \quad S = 0 \to \quad m + S = 0.$$

Тогда $Y_{част} = \begin{pmatrix} x_{част} \\ y_{част} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot e^{4t}$ или $\begin{cases} x_{част} = A \cdot e^{4t} \\ y_{част} = B \cdot e^{4t} \end{cases}$.

6. Найдем значения A и B методом неопределенных коэффициентов.

Для этого найдем сначала производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$:

$$\dot{x}_{част} = 4A \cdot e^{4t}$$
$$\dot{y}_{част} = 4B \cdot e^{4t}$$

Подставим найденные функции в исходную систему:

$$\begin{cases} 4A \cdot e^{4t} = 2A \cdot e^{4t} + B \cdot e^{4t} \\ B \cdot e^{4t} = A \cdot e^{4t} + 2B \cdot e^{4t} - 3 \cdot e^{4t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A = 2A + B \\ B = A + 2B - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \end{cases}$$

Окончательно: $\begin{cases} x_{част} = -e^{4t} \\ y_{част} = -2e^{4t} \end{cases}$

7. Получим: $\begin{cases} x = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{3t} - e^{4t} \\ y = -C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{3t} - 2e^{4t} \end{cases}$

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{3t} - e^{4t} \\ y = -C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{3t} - 2e^{4t} \end{cases}}$