Этап №6
Тема: Интерполяция и аппроксимация функций заданных таблично

Дано:

x	1	2	3	4
$y=f(x)$	1	10	2	1

а) Построить интерполяционный полином Лагранжа для заданной функции

Для заданной табличной функции:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

полином Лагранжа $L_n(x)$ записывается следующим образом:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}y_i$$

Решение:

$$L(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}\cdot 10+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}\cdot 2+$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}\cdot 1$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$L(x)=\frac{x^3-9x^2+26x-24}{-6}+\frac{x^3-8x^2+19x-12}{2}\cdot 10+\frac{x^3-7x^2+14x-8}{-2}\cdot 2+$$
$$+\frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}$$

$$\boxed{L(x)=4x^3-32.5x^2+78.5x-49}$$

Проверка:

$$L(1)=4\cdot 1^3-32.5\cdot 1^2+78.5\cdot 1-49=1$$
$$L(2)=4\cdot 2^3-32.5\cdot 2^2+78.5\cdot 2-49=10$$
$$L(3)=4\cdot 3^3-32.5\cdot 3^2+78.5\cdot 3-49=2$$
$$L(4)=4\cdot 4^3-32.5\cdot 4^2+78.5\cdot 4-49=1$$

б) Построить интерполяционную формулу Ньютона

Для заданной табличной функции с равноотстоящими узлами интерполяции $x_0, x_1, x_2...., x_n$:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

полином Ньютона $P_n(x)$ записывается следующим образом:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + ...$$

$$......+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_{n-1})$$

где $h = x_1 - x_0$ - шаг по сетке, а $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$ и.т.д. – конечные разности, соответствующих порядков.

Решение:

Построим таблицу конечных разностей, пользуясь формулами:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \qquad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \qquad \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 \qquad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$

№ точки	$y=f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	9	-17	24
1	10	-8	7	
2	2	-1		
3	1			

Пользуясь таблицей, запишем интерполяционную формулу Ньютона:

$$P(x) = \frac{y_0}{h^0 \cdot 0!} + \frac{\Delta y_0}{h \cdot 1!}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^3 \cdot 3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

где

$$h = x_1 - x_0 = 1$$

$$P(x) = \frac{1}{1^0 \cdot 0!} + \frac{9}{1 \cdot 1!}(x-1) + \frac{-17}{1^2 \cdot 2!}(x-1)(x-2) + \frac{24}{1^3 \cdot 3!}(x-1)(x-2)(x-3)$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$P(x) = 1 + 9(x-1) - 8.5(x^2 - 3x + 2) + 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

$$\boxed{P(x) = 4x^3 - 32.5x^2 + 78.5x - 49}$$

<u>Проверка:</u>

$$P(1) = 4\cdot 1^3 - 32.5\cdot 1^2 + 78.5\cdot 1 - 49 = 1$$

$$P(2) = 4\cdot 2^3 - 32.5\cdot 2^2 + 78.5\cdot 2 - 49 = 10$$

$$P(3) = 4\cdot 3^3 - 32.5\cdot 3^2 + 78.5\cdot 3 - 49 = 2$$

$$P(4) = 4\cdot 4^3 - 32.5\cdot 4^2 + 78.5\cdot 4 - 49 = 1$$

Внимание !

В случае равноотстоящих узлов интерполяции интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона совпадают!

в) Аппроксимировать функцию полиномами 1-го и 2-го порядка по методу наименьших квадратов

Будем искать аппроксимирующий полином 2-го порядка в виде:

$$g_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Неизвестные коэффициенты a_0, a_1, a_2 определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + s_2a_2 = t_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + s_3a_2 = t_1 \\ s_2a_0 + s_3a_1 + s_4a_2 = t_2 \end{cases}$$

Соответственно аппроксимирующий полином 1-го порядка будем искать в виде:

$$g_1(x) = a_1x + a_0$$

Неизвестные коэффициенты a_0, a_1 определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 = t_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 = t_1 \end{cases}$$

Параметры системы определяются формулами:

$$s_0 = x_0^0 + x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 \qquad s_1 = x_0^1 + x_1^1 + x_2^1 + x_3^1$$

$$s_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad s_3 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

$$s_4 = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$$

$$t_0 = y_0 + y_1 + y_2 \cdot + y_3$$

$$t_1 = y_0 \cdot x_0 + y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 + y_3 \cdot x_3$$

$$t_2 = y_0 \cdot x_0^2 + y_1 \cdot x_1^2 + y_2 \cdot x_2^2 + y_3 \cdot x_3^2$$

Решение:

Для составления систем для определения неизвестных коэффициентов аппроксимирующих полиномов составим таблицу:

№ точки	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	y	$y \cdot x$	$y \cdot x^2$
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	4	8	16	10	20	40
2	1	3	9	27	81	2	6	18
3	1	4	16	64	256	1	4	16
	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	t_0	t_1	t_2
Σ	**4**	**10**	**30**	**100**	**354**	**14**	**31**	**75**

Запишем систему для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома 2-го порядка:

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 + 20a_2 = 14 \\ 10a_0 + 30a_1 + 100a_2 = 31 \\ 30a_0 + 100a_1 + 354a_2 = 75 \end{cases}$$

Найдем решение системы по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{vmatrix} = 80,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 10 & 30 \\ 31 & 30 & 100 \\ 75 & 100 & 354 \end{vmatrix} = -560, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 14 & 30 \\ 10 & 31 & 100 \\ 30 & 750 & 354 \end{vmatrix} = 936, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 14 \\ 10 & 30 & 31 \\ 30 & 100 & 75 \end{vmatrix} = -200$$

Тогда запишем значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-560}{80} = -7, \quad a_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{936}{80} = 11.7, \quad a_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-200}{80} = -2.5$$

$$\boxed{g_2(x) = -2.5x^2 + 11.7x - 7}$$

Найдём сумму квадратов отклонений найденного полинома от заданной табличной функции:

$$S_2 = [(-2.5\cdot 1^2 + 11.7\cdot 1 - 7) - 1]^2 + [(-2.5\cdot 2^2 + 11.7\cdot 2 - 7) - 10]^2 + [(-2.5\cdot 3^2 + 11.7\cdot 3 - 7) - 2]^2 +$$
$$+ [(-2.5\cdot 4^2 + 11.7\cdot 4 - 7) - 1]^2 = (2.2 - 1)^2 + (6.4 - 10)^2 + (5.6 - 2)^2 + (-0.2 - 1)^2 = 28.8$$

Аналогично, запишем систему для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома 1-го порядка:

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 14 \\ 10a_0 + 30a_1 = 31 \end{cases}$$

Найдем решение системы по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix} = 20, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 31 & 30 \end{vmatrix} = 110, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 10 & 31 \end{vmatrix} = -16,$$

Тогда запишем значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{110}{20} = 5.5, \quad a_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{20} = -0.8$$

$$\boxed{g_1(x) = -0.8x + 5.5}$$

Найдём сумму квадратов отклонений найденного полинома от заданной табличной функции:

$$S_1 = [(-0.8 \cdot 1 + 5.5) - 1]^2 + [(-0.8 \cdot 2 + 5.5) - 10]^2 + [(-0.8 \cdot 3 + 5.5) - 2]^2 + [(-0.8 \cdot 4 + 5.5) - 1]^2 =$$
$$= (4.7 - 1)^2 + (3.9 - 10)^2 + (3.1 - 2)^2 + (2.3 - 1)^2 = 53.8$$

На чертеже представлены интерполяционные полиномы Лагранжа $L(x)$ и Ньютона $P(x)$, а также аппроксимирующие полиномы $g_1(x)$ и $g_2(x)$.