Этап №5
Тема: Методы отыскания корней алгебраического уравнения

Дано: $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$

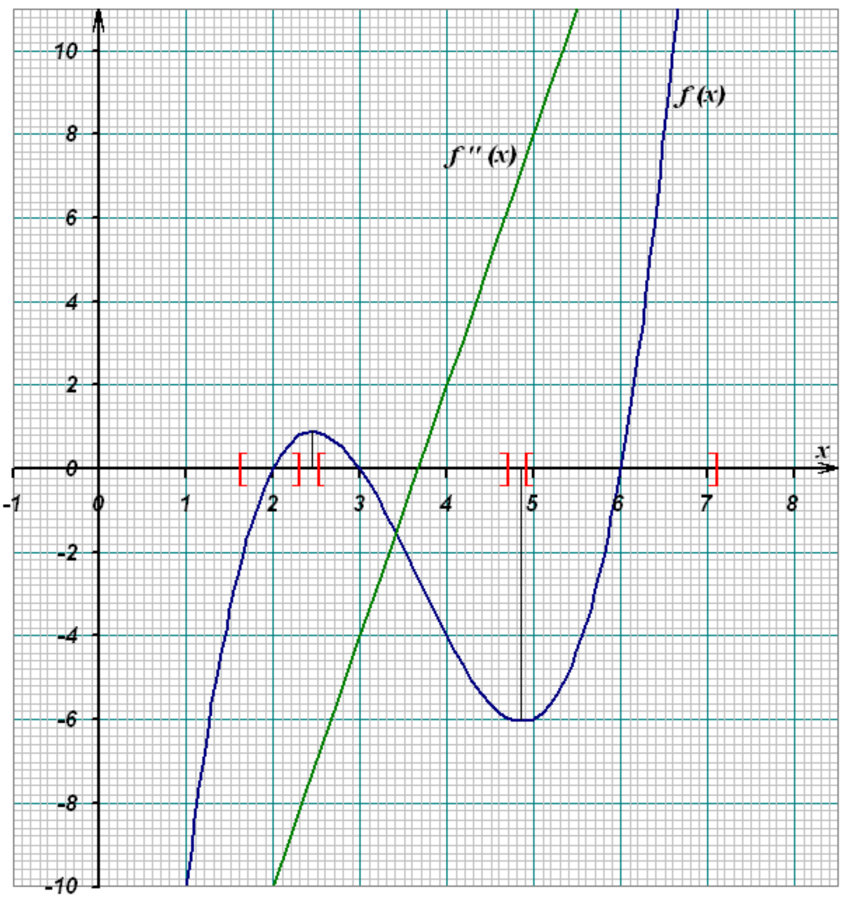
а) Отделить корни алгебраического уравнения

Алгоритм отделения простых корней с помощью исследования функций и построения графиков

1. Построить график функции $f(x)$.
2. Найти стационарные точки функции, решив уравнение $f'(x) = 0$. Стационарные точки имеют абсциссы: $x_1^{ст}, x_2^{ст}, x_3^{ст} ... x_m^{ст}$.
3. С помощью графика исследовать отрезки $[x_i^{ст}, x_{i+1}^{ст}]$. Если $f(x_i^{ст}) \cdot f(x_{i+1}^{ст}) < 0$, то $[a,b] \subset (x_i^{ст}, x_{i+1}^{ст})$.
4. Отрезки $[a,b]$ на интервалах $]-\infty, x_1^{ст}]$ и $[x_m^{ст}, \infty[$ - конкретизировать с помощью графика, исходя из условия $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Решение:

Построим график функции.



Найдем стационарные точки функции, определяемой левой частью исходного уравнения:
$f'(x) = 3x^2 - 22x + 36 = 0 \quad \Rightarrow$

$$x_{1,2}^{ст} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 - 432}}{6} \quad \Rightarrow \quad x_1^{ст} = 2.4648 \quad x_2^{ст} = 4.8685$$

Вычислим значение функции в полученных точках:

$f(x_1^{ст}) = 0.8794 \qquad f(x_2^{ст}) = -6.0646$

Рассмотрим отрезок $[x_1^{ст}, x_2^{ст}] = [2.4648,\ 4.8685]$. Т.к. функция принимает на концах отрезка $[x_1^{ст}, x_2^{ст}]$ разные знаки, а производная сохраняет знак (функция на отрезке убывает), то средний корень может быть отделен на отрезке $[2.5,\ 4.7] \in (2.4648,\ 4.8685)$

Отделим левый корень. В качестве правой границы отрезка может быть выбрана точка $b = 2.3 < 2.4648$, а в качестве левой границы любая точка из интервала $(-\infty,\ 2)$. Возьмем $a = 1.6$.

Отделим правый корень. В качестве левой границы отрезка выберем точку $a = 4.9 > 4.8685$, а в качестве правой границы любая точка из интервала $(6,\ \infty)$. Возьмем $b = 7.1$.

<u>Окончательно:</u>

левый корень уравнения отделен на отрезке $[1.6;\ 2.3]$
средний корень уравнения отделен на отрезке $[2.5;\ 4.7]$
правый корень уравнения отделен на отрезке $[4.9;\ 7.1]$

б) Уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом Ньютона на отрезке [1.6; 2.3], точность счета 0.01

<u>Алгоритм уточнения корня алгебраического уравнения методом Ньютона</u>

1. На отрезке $[a, b]$ отделения единственного корня уравнения задать начальное приближение x^0.

Проверить условие сходимости $f(x^0) \cdot f''(x^0) > 0$ для выбранного приближения, если условие не выполнено задать другое начальное приближение.

2. Вычислить приближения корня по формуле $x^{k+1} = x^k - \dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k = 0, 1, 2.....$

3. Повторять процедуру 2. до тех пор пока $\left|x^{k+1} - x^k\right| < \varepsilon$, тогда $x^* = x^{k+1}$

<u>Решение:</u>

Выберем начальное приближение корня $x^0 = 1.6$

Для проверки достаточных условий сходимости метода Ньютона из выбранной начальной точки, построим график второй производной функции, определяемой левой частью уравнения:

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 36$$
$$f'(x) = 3x^2 - 22x + 36$$
$$f''(x) = 6x - 22$$

По графику видно, что в выбранной начальной точке условия сходимости метода Ньютона выполняются: $f(1.6) \cdot f''(1.6) > 0$.

Метод Ньютона

Вычислим <u>первое приближение корня:</u>

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} = 1.6 - \frac{1.6^3 - 11 \cdot 1.6^2 + 36 \cdot 1.6 - 36}{3 \cdot 1.6^2 - 22 \cdot 1.6 + 36} = 1.89057$$
$$\left|x^0 - x^1\right| = 1.6 - 1.89057 = 0.2906$$

Вычислим <u>второе приближение корня:</u>

$$x^2 = x^1 - \frac{f(x^1)}{f'(x^1)} = 1.89057 - \frac{1.89057^3 - 11 \cdot 1.89057^2 + 36 \cdot 1.89057 - 36}{3 \cdot 1.89057^2 - 22 \cdot 1.89057 + 36} = 1.98782$$
$$\left|x^1 - x^2\right| = 1.89057 - 1.9878 = 0.0972$$

Последующие итерации запишем в виде таблицы.

№ итерации	x	$f(x)$	$\lvert\Delta x\rvert$
0	1.6	-2.464	-
1	1.8906	-0.4989	0.2906
2	1.9878	-0.0495	0.0972
3	1.9998	-0.0007	0.0120
4	2.0000	0.0000	0.0002

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.01.

Запишем полученное решение $x^* \approx 2$.

Ответ: найдено решение уравнения: $x^* = 2$.

в) Уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом итераций на отрезке [1.6; 2.3], используя преобразование $x = x + \alpha \cdot f(x)$, точность счета 0.01

<u>Алгоритм уточнения корня алгебраического уравнения методом итерации</u>

1. Преобразовать уравнение к равносильному виду $x = \varphi(x)$. Проверить условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$ на отрезке $[a, b]$.

Для этого построить график $\varphi'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если условие не выполнено найти другое преобразование $x = \varphi(x)$.

Замечание: В качестве эквивалентного преобразования исходного уравнения взять следующее: $x = \underbrace{x + \alpha \cdot f(x)}_{\varphi(x)}$, коэффициент α подобрать таким образом, чтобы выполнялось $|\varphi'(x)| < 1$ на отрезке $[a, b]$.

2. Задать начальное приближение x^0 произвольно на $[a, b]$.

3. Вычислить приближения корня по формуле $x^{k+1} = \varphi(x^k), \quad k = 0, 1, 2....$

4. Повторять процедуру 3. до тех пор пока $|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$, тогда $x^* = x^{k+1}$

<u>Решение:</u>

Преобразуем исходное уравнение $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$ следующим образом:

$$x = x + \alpha \cdot (x^3 - 11x^2 + 36x - 36)$$

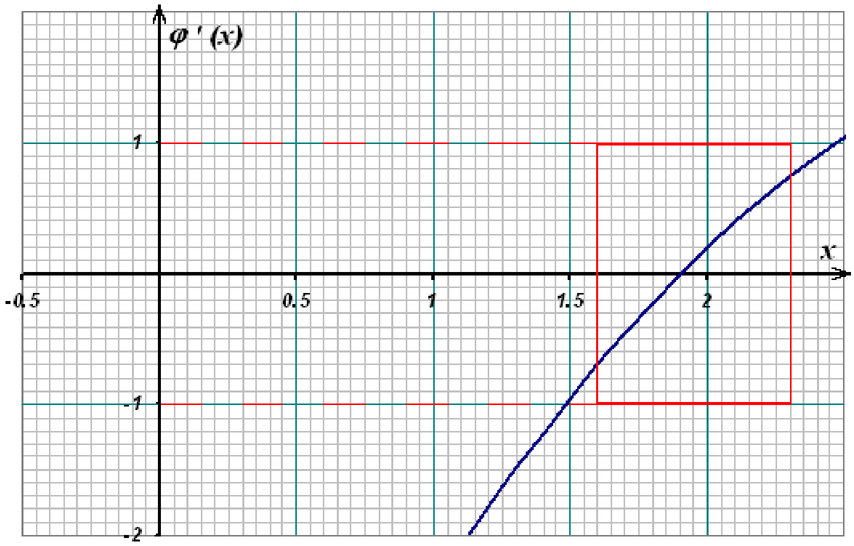
Возьмем $\alpha = -0.2$, следовательно $\varphi(x) = x - 0.2 \cdot (x^3 - 11x^2 + 36x - 36)$

Проверим условие сходимости метода итерации для преобразованного уравнения. Найдем производную функции $\varphi'(x)$ и построим ее график на отрезке $[1.6; 2.3]$:

$$\varphi'(x) = 1 - 0.2(3x^2 - 22x + 36)$$

Точки для построения графика на отрезке $[1.6; 2.3]$:

x	$\varphi'(x)$
1.6	-0.696
1.7	-0.454
1.8	-0.224
1.9	-0.006
2	0.2
2.1	0.394
2.2	0.576
2.3	0.746



По графику видно, что условие сходимости выполнено*): $\left|\varphi'(x)\right| < 1$ на $[1.6;\ 2.3]$.

Выберем начальное приближение корня $x^0 = 1.6$.

Метод итераций

Вычислим первое приближение корня:

$$x^1 = \varphi(x^0) = 1.6 - 0.2(1.6^3 - 11\cdot 1.6^2 + 36\cdot 1.6 - 36) = 2.0928$$
$$\left|x^0 - x^1\right| = 1.6 - 2.0928 = 0.4928$$

Вычислим второе приближение корня:

$$x^2 = \varphi(x^1) = 2.0928 - 0.2(2.0928^3 - 11\cdot 2.0928^2 + 36\cdot 2.0928 - 36) = 2.02701$$
$$\left|x^1 - x^2\right| = 2.0928 - 2.02701 = 0.06579$$

Последующие итерации запишем в виде таблицы:

№ итерации	x	φ(x)	f(x)	$\left|\Delta x\right|$
0	1.6	2.09280	-2.46400	
1	2.09280	2.02701	0.32894	0.49280
2	2.02701	2.00613	0.10442	0.06579
3	2.00613	2.00126	0.02432	0.02088
4	2.00126	2.00025	0.00504	0.00486

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.01.

Запишем полученное решение $x^* \approx 2.00126$.

Ответ: найдено решение уравнения: $x^* = 2$.

*) Если условие сходимости для $\varphi(x)$ не выполняется, необходимо подобрать другой коэффициент α.

г) Уточнить наименьший (левый) корень уравнения методом половинного деления на отрезке [1.6; 2.3], точность счета 0.03

Алгоритм уточнения корня алгебраического уравнения методом половинного деления

1. Определить начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0] = [a, b]$ и проверить условие сходимости $f(a) \cdot f(b) \le 0$:

2. Найти середину выбранного отрезка $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}, \quad k = 0, 1, 2...$

3. Если $f(a_k) \cdot f(c_k) \le 0$, то $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$.
   Если $f(a_k) \cdot f(c_k) > 0$, то $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$

4. Повторять процедуру 2-4. до тех пор пока $b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$, тогда $x^* = \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

Решение:

Проверим условие сходимости метода половинного деления на отрезке $[1.6; 2.3]$:

$$\begin{array}{l} f(1.6) = -2.464 \\ f(2.3) = 0.777 \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(1.6) \cdot f(2.3) < 0$$ - значит условие сходимости выполнено.

Метод половинного деления (дихотомии)

Итерация 1

Вычислим значения функции на концах текущего отрезка $[1.6; 2.3]$:
$f(a) = f(1.6) = -2.464, \quad f(b) = f(2.3) = 0.777$

Найдем середину текущего отрезка $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1.6 + 2.3}{2} = 1.95$

Вычислим значение функции в середине отрезка: $f(c) = f(1.95) = -0.2126$

Рассмотрим произведение $f(a) \cdot f(c)$, это произведение имеет положительный знак, т.к. $f(a) < 0$ и $f(c) < 0$, значит новый отрезок для отыскания корня будет $[c, b] = [1.95; 2.3]$

$|\Delta x| = 2.3 - 1.6 = 0.7$ эта величина превышает заданную точность 0.03, вычисления продолжаются.

Итерация 2

Вычислим значения функции на концах текущего отрезка $[1.95; 2.3]$:
$f(a) = f(1.95) = -0.2126, \quad f(b) = f(2.3) = 0.777$

Найдем середину текущего отрезка $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1.95 + 2.3}{2} = 2.125$

Вычислим значение функции в середине отрезка: $f(c) = f(2.125) = 0.4238$

Рассмотрим произведение $f(a) \cdot f(c)$, это произведение имеет неположительный знак, т.к. $f(a) < 0$ и $f(c) > 0$, значит новый отрезок для отыскания корня будет $[a, c] = [1.95; 2.125]$.

$|\Delta x| = 2.3 - 1.95 = 0.35$ эта величина превышает заданную точность 0.03, вычисления продолжаются.

Последующие итерации запишем в виде таблицы:

№ итерации	a	b	f(a)	f(b)	$c = \frac{a+b}{2}$	f(c)	$\|\Delta x\|$
0	1.6	2.3	-2.464	0.777	1.95	-0.2126	0.7
1	1.95	2.3	-0.2126	0.777	2.125	0.4238	0.35
2	1.95	2.125	-0.2126	0.4238	2.0375	0.1430	0.175
3	1.95	2.0375	-0.2126	0.1430	1.9938	-0.0252	0.0875
4	1.9938	2.0375	-0.0252	0.1430	2.0156	0.0613	0.0438
5	1.9938	2.0156	-0.0252	0.0613	2.0047	0.0186	0.0219

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.03.

Запишем полученное решение $x^* \approx 2.0047$.

Ответ: найдено решение уравнения: $x^* = 2$.