

**Этап №4****Методы решения систем линейных алгебраических уравнений**

**Дано:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -5 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -1 \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 13 \end{aligned}$$

**а) Найти решение системы методом простых итераций (точность счёта  $\varepsilon = 0.01$ )**

**Алгоритм решения СЛАУ методом простых итераций**

1. Проверить условие сходимости метода. Метод сходится, если диагональные коэффициенты в левой части системы преобладают, т.е. в каждом уравнении такой коэффициент по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных

2. Если условие не выполнено, привести систему к виду, при котором диагональные элементы преобладают. Для этого:

- Найти в левой части каждого уравнения максимальный по модулю коэффициент, если при этом он по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных, записать уравнение в новую систему, так, чтобы этот коэффициент стал диагональным.
- Из оставшихся после перестановки уравнений составить линейно-независимые между собой комбинации, так чтобы все строки новой системы были заполнены и соблюдался принцип преобладания диагонального коэффициента. При этом необходимо, чтобы все уравнения исходной системы были использованы в новой.

3. Разрешить первое уравнение полученной системы  $AX = B$  относительно  $x_1$ , второе относительно  $x_2$  и т.д. В результате получается эквивалентная система  $X = \beta + \alpha X$ .

4. Задать начальное приближение  $X^0 = \beta$

5. Применять алгоритм

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^k + \alpha_{13}x_3^k + \dots + \alpha_{1n}x_n^k \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^k + \alpha_{23}x_3^k + \dots + \alpha_{2n}x_n^k \\ \dots \dots \dots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^k + \alpha_{n2}x_2^k + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^k \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

до тех пор пока  $\|\Delta X\| = \max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon$ .

В этом случае критерий окончания может быть интерпретирован так: производить вычисления до тех пор, пока в двух последовательных итерациях максимальная разница между соответствующими парами неизвестных не станет по модулю меньше  $\varepsilon$ .

**Решение:**

Проверим условие сходимости для заданной системы:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 2 && \rightarrow |2| < |3| + |-4| + |1| \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -5 && \rightarrow |-2| < |1| + |-5| + |1| \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -1 && \rightarrow |1| < |5| + |-3| + |-4| \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 13 && \rightarrow |2| < |10| + |2| + |-1| \end{aligned}$$

Очевидно, условие сходимости не выполнено ни для одного из уравнений системы, следовательно, необходимо преобразовать исходную систему к виду, при котором диагональные коэффициенты преобладают.

Преобразуем исходную систему.

Обозначим уравнения системы латинскими буквами А, В, С, D. Найдем в левой части каждого уравнения максимальный по модулю коэффициент.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - \boxed{4}x_3 + x_4 &= 2 && \text{A} \\ x_1 - 2x_2 - \boxed{5}x_3 + x_4 &= -5 && \text{B} \\ \boxed{5}x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -1 && \text{C} \\ \boxed{10}x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 13 && \text{D} \end{aligned}$$

В уравнениях В и D выделенные коэффициенты по модулю больше суммы всех остальных, переставим соответствующие уравнения так, чтобы эти коэффициенты стали диагональными:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 13 && \text{D} \\ \text{-----} &&& \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -5 && \text{B} \\ \text{-----} &&& \end{aligned}$$

Для остальных уравнений применим линейные преобразования:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 13 && \text{D} \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 7 && \text{A-B} \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -5 && \text{B} \\ 3x_1 &- 9x_4 = -5 && \text{2A-B+2C-D} \end{aligned}$$

Проверим условие сходимости итерационных методов для полученной системы:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 13 && \rightarrow |10| > |2| + |-1| + |2| \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 7 && \rightarrow |5| > |1| + |1| + |0| \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -5 && \rightarrow |-5| > |1| + |-2| + |1| \\ 3x_1 &- 9x_4 = -5 && \rightarrow |-9| > |3| + |0| + |0| \end{aligned}$$

Условие сходимости выполнено.

Запишем систему, эквивалентную полученной, для этого из первого уравнения системы выразим переменную  $x_1$ , из второго -  $x_2$  и т.д.

$$x_1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{10}x_3 - \frac{1}{5}x_4$$

$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4$$

$$x_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1$$

Выберем в качестве начального приближения следующие значения переменных:

$$x_1^0 = \frac{13}{10}$$

$$x_2^0 = \frac{7}{5}$$

$$x_3^0 = 1$$

$$x_4^0 = \frac{1}{6}$$

### Метод итераций

#### Итерация 1

Запишем формулы для вычисления первого приближения решения:

$$x_1^1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2^0 + \frac{1}{10}x_3^0 - \frac{1}{5}x_4^0$$

$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^0 - \frac{1}{5}x_3^0$$

$$x_3^1 = 1 + \frac{1}{5}x_1^0 - \frac{2}{5}x_2^0 + \frac{1}{5}x_4^0$$

$$x_4^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1^0$$

Вычислим первое приближение:

$$x_1^1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{5} + \frac{1}{10} \cdot 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 0.987$$

$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{13}{10} - \frac{1}{5} \cdot 1 = 0.940$$

$$x_3^1 = 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{13}{10} - \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 0.833$$

$$x_4^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{10} = 1.100$$

Вычислим  $\|\Delta X\| = \max_i |x_i^0 - x_i^1|$

$$|x_1^0 - x_1^1| = |1.3 - 0.987| = 0.313$$

$$|x_2^0 - x_2^1| = |1.4 - 0.940| = 0.460 \Rightarrow \|\Delta X\| = 0.46 > 0.01, \text{ продолжаем вычисления.}$$

$$|x_3^0 - x_3^1| = |1.0 - 0.833| = 0.167$$

$$|x_4^0 - x_4^1| = |0.667 - 1.1| = 0.433$$

### Итерация 2

Запишем формулы для вычисления второго приближения решения:

$$x_1^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2^1 + \frac{1}{10}x_3^1 - \frac{1}{5}x_4^1$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^1 - \frac{1}{5}x_3^1$$

$$x_3^2 = 1 + \frac{1}{5}x_1^1 - \frac{2}{5}x_2^1 + \frac{1}{5}x_4^1$$

$$x_4^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1^1$$

Вычислим второе приближение:

$$x_1^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5} \cdot 0.940 + \frac{1}{10} \cdot 0.833 - \frac{1}{5} \cdot 1.100 = 0.975$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot 0.987 - \frac{1}{5} \cdot 0.833 = 1.036$$

$$x_3^2 = 1 + \frac{1}{5} \cdot 0.987 - \frac{2}{5} \cdot 0.940 + \frac{1}{5} \cdot 1.100 = 1.041$$

$$x_4^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0.987 = 0.996$$

Вычислим  $\|\Delta X\| = \max_i |x_i^1 - x_i^2|$

$$|x_1^1 - x_1^2| = |0.987 - 0.975| = 0.012$$

$$|x_2^1 - x_2^2| = |0.940 - 1.036| = 0.096 \Rightarrow \|\Delta X\| = 0.208 > 0.01, \text{ продолжаем вычисления.}$$

$$|x_3^1 - x_3^2| = |0.833 - 1.041| = 0.208$$

$$\left| x_4^1 - x_4^2 \right| = |1.100 - 0.996| = 0.104$$

Последующие итерации запишем в виде таблицы.

№ итерации	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\ \Delta X\ $
0	1.300	1.400	1.000	0.667	
1	0.987	0.940	0.833	1.100	0.460
2	0.975	1.036	1.041	0.996	0.208
3	0.998	0.997	0.978	0.992	0.063
4	1.000	1.004	0.999	0.999	0.021
5	0.999	1.000	0.998	1.000	0.004

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.01.

Запишем полученное решение:

$$x_1^* = 0.999 \approx 1$$

$$x_2^* = 1$$

$$x_3^* = 0.998 \approx 1$$

$$x_4^* = 1$$

**Ответ:** найдено решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 1, \quad x_4^* = 1.$$

**б) Найти решение системы методом Зейделя  
(точность счёта  $\varepsilon = 0.01$ )**

**Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса-Зейделя**

1. Проверить условие сходимости метода. Метод сходится, если диагональные коэффициенты в левой части системы преобладают, т.е. в каждом уравнении такой коэффициент по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных

2. Если условие не выполнено, привести систему к виду, при котором диагональные элементы преобладают. Для этого:

- Найти в левой части каждого уравнения максимальный по модулю коэффициент, если при этом он по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных, записать уравнение в новую систему, так, чтобы этот коэффициент стал диагональным.
- Из оставшихся после перестановки уравнений составить линейно-независимые между собой комбинации, так чтобы все строки новой системы были заполнены и соблюдался принцип преобладания диагонального коэффициента. При этом необходимо, чтобы все уравнения исходной системы были использованы в новой.

3. Разрешить первое уравнение полученной системы  $AX = B$  относительно  $x_1$ , второе относительно  $x_2$  и т.д. В результате получается эквивалентная система  $X = \beta + \alpha X$ .

4. Задать начальное приближение  $X^0 = \beta$

5. Применять алгоритм

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^k + \alpha_{13}x_3^k + \dots + \alpha_{1n}x_n^k \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{k+1} + \alpha_{23}x_3^k + \dots + \alpha_{2n}x_n^k \\ x_3^{k+1} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{k+1} + \alpha_{32}x_2^{k+1} + \dots + \alpha_{3n}x_n^k \\ \dots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{k+1} + \alpha_{n2}x_2^{k+1} + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

до тех пор пока  $\|\Delta X\| = \max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon$ .

В этом случае критерий окончания может быть интерпретирован так: производить вычисления до тех пор, пока в двух последовательных итерациях максимальная разница между соответствующими парами неизвестных не станет по модулю меньше  $\varepsilon$ .

**Решение:**

Первые 4 пункта алгоритма метода аналогичны методу простых итераций, поэтому используем те же подготовленные расчётные формулы и то же начальное приближение:

$$x_1^0 = \frac{13}{10}$$

$$x_2^0 = \frac{7}{5}$$

$$x_3^0 = 1$$

$$x_4^0 = \frac{1}{6}$$

**Метод Зейделя****Итерация 1**

Запишем формулы для вычисления первого приближения решения:

$$x_1^1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2^0 + \frac{1}{10}x_3^0 - \frac{1}{5}x_4^0$$

$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^1 - \frac{1}{5}x_3^0$$

$$x_3^1 = 1 + \frac{1}{5}x_1^1 - \frac{2}{5}x_2^1 + \frac{1}{5}x_4^0$$

$$x_4^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1^1$$

Вычислим первое приближение:

$$x_1^1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{5} + \frac{1}{10} \cdot 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 0.987$$

$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot 0.987 - \frac{1}{5} \cdot 1 = 1.003$$

$$x_3^1 = 1 + \frac{1}{5} \cdot 0.987 - \frac{2}{5} \cdot 1.003 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 0.930$$

$$x_4^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0.987 = 0.996$$

Вычислим  $\|\Delta X\| = \max_i |x_i^0 - x_i^1|$

$$|x_1^0 - x_1^1| = |1.3 - 0.987| = 0.313$$

$$|x_2^0 - x_2^1| = |1.4 - 1.003| = 0.397 \Rightarrow \|\Delta X\| = 0.397 > 0.01, \text{ продолжаем вычисления.}$$

$$|x_3^0 - x_3^1| = |1.0 - 0.930| = 0.070$$

$$|x_4^0 - x_4^1| = |0.667 - 0.996| = 0.329$$

## Итерация 2

Запишем формулы для вычисления второго приближения решения:

$$x_1^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2^1 + \frac{1}{10}x_3^1 - \frac{1}{5}x_4^1$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^2 - \frac{1}{5}x_3^1$$

$$x_3^2 = 1 + \frac{1}{5}x_1^2 - \frac{2}{5}x_2^2 + \frac{1}{5}x_4^1$$

$$x_4^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1^2$$

Вычислим второе приближение:

$$x_1^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5} \cdot 1.003 + \frac{1}{10} \cdot 0.930 - \frac{1}{5} \cdot 0.996 = 0.993$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot 0.993 - \frac{1}{5} \cdot 0.930 = 1.015$$

$$x_3^2 = 1 + \frac{1}{5} \cdot 0.993 - \frac{2}{5} \cdot 1.003 + \frac{1}{5} \cdot 0.996 = 0.992$$

$$x_4^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0.993 = 0.998$$

Вычислим  $\|\Delta X\| = \max_i |x_i^1 - x_i^2|$

$$|x_1^1 - x_1^2| = |1.003 - 0.993| = 0.010$$

$$|x_2^1 - x_2^2| = |1.003 - 1.015| = 0.012 \Rightarrow \|\Delta X\| = 0.012 > 0.01, \text{ продолжаем вычисления.}$$

$$|x_3^1 - x_3^2| = |0.930 - 0.992| = 0.062$$

$$|x_4^1 - x_4^2| = |0.996 - 0.998| = 0.002$$

Последующие итерации запишем в виде таблицы.

№ итерации	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\ \Delta X\ $
0	1.300	1.400	1.000	0.667	
1	0.987	1.003	0.930	0.996	0.397
2	0.993	1.015	0.992	0.998	0.062
3	0.997	1.002	0.998	0.998	0.013
4	0.999	1.000	0.999	0.999	0.002

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.01.



Запишем полученное решение:

$$x_1^* = 0.999 \approx 1$$

$$x_3^* = 1$$

$$x_3^* = 0.999 \approx 1$$

$$x_4^* = 0.999 \approx 1$$

**Ответ:** найдено решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 1, \quad x_4^* = 1.$$