Этап №4
Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Дано:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -5 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -1 \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 13 \end{aligned}$$

а) Найти решение системы методом простых итераций
(точность счёта $\varepsilon = 0.01$)

Алгоритм решения СЛАУ методом простых итераций

1. Проверить условие сходимости метода. Метод сходится, если диагональные коэффициенты в левой части системы преобладают, т.е. в каждом уравнении такой коэффициент по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных

2. Если условие не выполнено, привести систему к виду, при котором диагональные элементы преобладают. Для этого:
   - Найти в левой части каждого уравнения максимальный по модулю коэффициент, если при этом он по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных, записать уравнение в новую систему, так, чтобы этот коэффициент стал диагональным.
   - Из оставшихся после перестановки уравнений составить линейно-независимые между собой комбинации, так чтобы все строки новой системы были заполнены и соблюдался принцип преобладания диагонального коэффициента. При этом необходимо, чтобы все уравнения исходной системы были использованы в новой.

3. Разрешить первое уравнение полученной системы $AX = B$ относительно x_1, второе относительно - x_2 и т.д. В результате получается эквивалентная система $X = \beta + \alpha X$.

4. Задать начальное приближение $X^0 = \beta$

5. Применять алгоритм

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^k + \alpha_{13}x_3^k + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n^k \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^k + \alpha_{23}x_3^k + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^k + \alpha_{n2}x_2^k + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^k \end{cases}, \quad k = 0,1,2\ldots\ldots,$$

до тех пор пока $\|\Delta X\| = \max\limits_j \left| x_j^{k+1} - x_j^k \right| < \varepsilon$.

В этом случае критерий окончания может быть интерпретирован так: производить вычисления до тех пор, пока в двух последовательных итерациях максимальная разница между соответствующими парами неизвестных не станет по модулю меньше ε.

Решение:

Проверим условие сходимости для заданной системы:

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \quad \rightarrow \quad |2| < |3| + |-4| + |1|$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -5 \quad \rightarrow \quad |-2| < |1| + |-5| + |1|$$
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \quad \rightarrow \quad |1| < |5| + |-3| + |-4|$$
$$10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 13 \quad \rightarrow \quad |2| < |10| + |2| + |-1|$$

Очевидно, условие сходимости не выполнено ни для одного из уравнений системы, следовательно, необходимо преобразовать исходную систему к виду, при котором диагональные коэффициенты преобладают.

Преобразуем исходную систему.

Обозначим уравнения системы латинскими буквами A, B, C, D. Найдем в левой части каждого уравнения максимальный по модулю коэффициент.

$$2x_1 + 3x_2 - \boxed{4}x_3 + x_4 = 2 \qquad A$$
$$x_1 - 2x_2 - \boxed{\mathbf{5}}x_3 + x_4 = -5 \qquad B$$
$$\boxed{5}x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \qquad C$$
$$\boxed{\mathbf{10}}x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 13 \qquad D$$

В уравнениях B и D выделенные коэффициенты по модулю больше суммы всех остальных, переставим соответствующие уравнения так, чтобы эти коэффициенты стали диагональными:

$$\mathbf{10}x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 13 \qquad D$$

- -

$$x_1 - 2x_2 - \mathbf{5}x_3 + x_4 = -5 \qquad B$$

- -

Для остальных уравнений применим линейные преобразования:

$$\mathbf{10}x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 13 \qquad D$$
$$x_1 + \mathbf{5}x_2 + x_3 = 7 \qquad A\text{-}B$$
$$x_1 - 2x_2 - \mathbf{5}x_3 + x_4 = -5 \qquad B$$
$$3x_1 - \mathbf{9}x_4 = -5 \qquad 2A\text{-}B\text{+}2C\text{-}D$$

Проверим условие сходимости итерационных методов для полученной системы:

$$\mathbf{10}x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 13 \quad \rightarrow \quad |10| > |2| + |-1| + |2|$$
$$x_1 + \mathbf{5}x_2 + x_3 = 7 \quad \rightarrow \quad |5| > |1| + |1| + |0|$$
$$x_1 - 2x_2 - \mathbf{5}x_3 + x_4 = -5 \quad \rightarrow \quad |-5| > |1| + |-2| + |1|$$
$$3x_1 - \mathbf{9}x_4 = -5 \quad \rightarrow \quad |-9| > |3| + |0| + |0|$$

Условие сходимости выполнено.

Запишем систему, эквивалентную полученной, для этого из первого уравнения системы выразим переменную x_1, из второго - x_2 и т.д.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{10}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\
x_2 &= \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\
x_3 &= 1 + \frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 \\
x_4 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1
\end{aligned}
}
$$

Выберем в качестве начального приближения следующие значения переменных:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_1^0 &= \frac{13}{10} \\
x_2^0 &= \frac{7}{5} \\
x_3^0 &= 1 \\
x_4^0 &= \frac{1}{6}
\end{aligned}
}
$$

Метод итераций

Итерация 1

Запишем формулы для вычисления первого приближения решения:

$$x_1^1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2^0 + \frac{1}{10}x_3^0 - \frac{1}{5}x_4^0$$

$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^0 - \frac{1}{5}x_3^0$$

$$x_3^1 = 1 + \frac{1}{5}x_1^0 - \frac{2}{5}x_2^0 + \frac{1}{5}x_4^0$$

$$x_4^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1^0$$

Вычислим первое приближение:

$$x_1^1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{5} + \frac{1}{10}\cdot 1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = 0.987$$

$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{13}{10} - \frac{1}{5}\cdot 1 = 0.940$$

$$x_3^1 = 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{13}{10} - \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = 0.833$$

$$x_4^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{13}{10} = 1.100$$

Вычислим $\|\Delta X\| = \max\limits_i \left| x_i^0 - x_i^1 \right|$

$\left| x_1^0 - x_1^1 \right| = |\,1.3 - 0.987\,| = 0.313$

$\left| x_2^0 - x_2^1 \right| = |\,1.4 - 0.940\,| = 0.460 \quad \Rightarrow \quad \|\Delta X\| = 0.46 > 0.01$, продолжаем вычисления.

$\left| x_3^0 - x_3^1 \right| = |\,1.0 - 0.833\,| = 0.167$

$\left| x_4^0 - x_4^1 \right| = |\,0.667 - 1.1\,| = 0.433$

Итерация 2

Запишем формулы для вычисления второго приближения решения:

$$x_1^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2^1 + \frac{1}{10}x_3^1 - \frac{1}{5}x_4^1$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^1 - \frac{1}{5}x_3^1$$

$$x_3^2 = 1 + \frac{1}{5}x_1^1 - \frac{2}{5}x_2^1 + \frac{1}{5}x_4^1$$

$$x_4^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1^1$$

Вычислим второе приближение:

$$x_1^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}\cdot 0.940 + \frac{1}{10}\cdot 0.833 - \frac{1}{5}\cdot 1.100 = 0.975$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\cdot 0.987 - \frac{1}{5}\cdot 0.833 = 1.036$$

$$x_2^3 = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0.987 - \frac{2}{5}\cdot 0.940 + \frac{1}{5}\cdot 1.100 = 1.041$$

$$x_4^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot 0.987 = 0.996$$

Вычислим $\|\Delta X\| = \max\limits_i \left| x_i^1 - x_i^2 \right|$

$\left| x_1^1 - x_1^2 \right| = |\,0.987 - 0.975\,| = 0.012$

$\left| x_2^1 - x_2^2 \right| = |\,0.940 - 1.036\,| = 0.096 \quad \Rightarrow \quad \|\Delta X\| = 0.208 > 0.01$, продолжаем вычисления.

$\left| x_3^1 - x_3^2 \right| = |\,0.833 - 1.041\,| = 0.208$

$$\left| x_4^1 - x_4^2 \right| = | 1.100 - 0.996 | = 0.104$$

Последующие итерации запишем в виде таблицы.

№ итерации	x_1	x_2	x_3	x_4	$\|\Delta X\|$
0	1.300	1.400	1.000	0.667	
1	0.987	0.940	0.833	1.100	0.460
2	0.975	1.036	1.041	0.996	0.208
3	0.998	0.997	0.978	0.992	0.063
4	1.000	1.004	0.999	0.999	0.021
5	0.999	1.000	0.998	1.000	0.004

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.01.

Запишем полученное решение:

$$x_1^* = 0.999 \approx 1$$
$$x_2^* = 1$$
$$x_3^* = 0.998 \approx 1$$
$$x_4^* = 1$$

Ответ: найдено решение системы линейных алгебраических уравнений: $x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 1, \quad x_4^* = 1$.

б) Найти решение системы методом Зейделя
(точность счёта $\varepsilon = 0.01$)

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса-Зейделя

1. Проверить условие сходимости метода. Метод сходится, если диагональные коэффициенты в левой части системы преобладают, т.е. в каждом уравнении такой коэффициент по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных

2. Если условие не выполнено, привести систему к виду, при котором диагональные элементы преобладают. Для этого:
   - Найти в левой части каждого уравнения максимальный по модулю коэффициент, если при этом он по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных, записать уравнение в новую систему, так, чтобы этот коэффициент стал диагональным.
   - Из оставшихся после перестановки уравнений составить линейно-независимые между собой комбинации, так чтобы все строки новой системы были заполнены и соблюдался принцип преобладания диагонального коэффициента. При этом необходимо, чтобы все уравнения исходной системы были использованы в новой.

3. Разрешить первое уравнение полученной системы $AX = B$ относительно x_1, второе относительно - x_2 и т.д. В результате получается эквивалентная система $X = \beta + \alpha X$.

4. Задать начальное приближение $X^0 = \beta$

5. Применять алгоритм

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^k + \alpha_{13}x_3^k + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n^k \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{k+1} + \alpha_{23}x_3^k + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n^k \\ x_3^{k+1} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{k+1} + \alpha_{32}x_2^{k+1} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{3n}x_n^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{k+1} + \alpha_{n2}x_2^{k+1} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} \end{cases} \quad , \qquad k = 0,1,2\ldots\ldots$$

до тех пор пока $\|\Delta X\| = \max\limits_j \left| x_j^{k+1} - x_j^k \right| < \varepsilon$.

В этом случае критерий окончания может быть интерпретирован так: производить вычисления до тех пор, пока в двух последовательных итерациях максимальная разница между соответствующими парами неизвестных не станет по модулю меньше ε.

Решение:

Первые 4 пункта алгоритма метода аналогичны методу простых итераций, поэтому используем те же подготовленные расчётные формулы и то же начальное приближение:

$$x_1^0 = \frac{13}{10}$$
$$x_2^0 = \frac{7}{5}$$
$$x_3^0 = 1$$
$$x_4^0 = \frac{1}{6}$$

Метод Зейделя

Итерация 1

Запишем формулы для вычисления первого приближения решения:

$$x_1^1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2^0 + \frac{1}{10}x_3^0 - \frac{1}{5}x_4^0$$
$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^1 - \frac{1}{5}x_3^0$$
$$x_3^1 = 1 + \frac{1}{5}x_1^1 - \frac{2}{5}x_2^1 + \frac{1}{5}x_4^0$$
$$x_4^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1^1$$

Вычислим первое приближение:

$$x_1^1 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{5} + \frac{1}{10}\cdot 1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = 0.987$$
$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\cdot 0.987 - \frac{1}{5}\cdot 1 = 1.003$$
$$x_3^1 = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0.987 - \frac{2}{5}\cdot 1.003 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = 0.930$$
$$x_4^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot 0.987 = 0.996$$

Вычислим $\|\Delta X\| = \max\limits_i \left| x_i^0 - x_i^1 \right|$

$$\left| x_1^0 - x_1^1 \right| = |\,1.3 - 0.987\,| = 0.313$$
$$\left| x_2^0 - x_2^1 \right| = |\,1.4 - 1.003\,| = 0.397 \quad \Rightarrow \quad \|\Delta X\| = 0.397 > 0.01$$, продолжаем вычисления.
$$\left| x_3^0 - x_3^1 \right| = |\,1.0 - 0.930\,| = 0.070$$
$$\left| x_4^0 - x_4^1 \right| = |\,0.667 - 0.996\,| = 0.329$$

Итерация 2

Запишем формулы для вычисления второго приближения решения:

$$x_1^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x_2^1 + \frac{1}{10}x_3^1 - \frac{1}{5}x_4^1$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^2 - \frac{1}{5}x_3^1$$

$$x_3^2 = 1 + \frac{1}{5}x_1^2 - \frac{2}{5}x_2^2 + \frac{1}{5}x_4^1$$

$$x_4^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1^2$$

Вычислим второе приближение:

$$x_1^2 = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}\cdot 1.003 + \frac{1}{10}\cdot 0.930 - \frac{1}{5}\cdot 0.996 = 0.993$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\cdot 0.993 - \frac{1}{5}\cdot 0.930 = 1.015$$

$$x_3^2 = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0.993 - \frac{2}{5}\cdot 1.003 + \frac{1}{5}\cdot 0.996 = 0.992$$

$$x_4^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot 0.993 = 0.998$$

Вычислим $\|\Delta X\| = \max\limits_i \left| x_i^1 - x_i^2 \right|$

$$\left| x_1^1 - x_1^2 \right| = |0.987 - 0.993| = 0.006$$

$$\left| x_2^1 - x_2^2 \right| = |1.003 - 1.015| = 0.012 \quad \Rightarrow \quad \|\Delta X\| = 0.062 > 0.01$$, продолжаем вычисления.

$$\left| x_3^1 - x_3^2 \right| = |0.930 - 0.992| = 0.062$$

$$\left| x_4^1 - x_4^2 \right| = |0.996 - 0.998| = 0.002$$

Последующие итерации запишем в виде таблицы.

№ итерации	x_1	x_2	x_3	x_4	$\|\Delta X\|$
0	1.300	1.400	1.000	0.667	
1	0.987	1.003	0.930	0.996	0.397
2	0.993	1.015	0.992	0.998	0.062
3	0.997	1.002	0.998	0.998	0.013
4	0.999	1.000	0.999	0.999	0.002

Вычисления закончены, т.к. достигнута заданная точность 0.01.

Запишем полученное решение:

$$x_1^* = 0.999 \approx 1$$
$$x_3^* = 1$$
$$x_3^* = 0.999 \approx 1$$
$$x_4^* = 0.999 \approx 1$$

Ответ: найдено решение системы линейных алгебраических уравнений:
$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 1, \quad x_4^* = 1$.