Этап №3
Методы решения задачи линейного программирования

Дано: $f(X) = -x_1 + 3x_2 \rightarrow extr$

$$-x_1 + x_2 \le 1 \qquad (1)$$
$$2x_1 + x_2 \le 4 \qquad (2)$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (3)$$

а) Решить задачу графически

Алгоритм графического решения задачи

1. Построить множество допустимых решений, задаваемое ограничениями.

2. Построить градиент целевой функции в точке с координатами $(0, 0)$.

3. Построить линию уровня целевой функции, проходящую через точку с координатами $(0, 0)$.

4. Если требуется найти максимум целевой функции, переносить, используя параллельный перенос, построенную линию уровня функции в направлении градиента до последнего касания с множеством допустимых решений. Точка (точки) касания - максимум.

Если требуется найти минимум целевой функции, аналогично переносить построенную линию уровня функции в направлении противоположном градиенту до последнего касания с множеством допустимых решений. Точка (точки) касания - минимум.

Решение:

Для графического решения задачи построим множество допустимых решений, задаваемое ограничениями (1)-(3).

Ограничение (1) в задаче определяется прямой $-x_1 + x_2 = 1$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	1
-1	0

Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и содержать точку $(0, 0)$, т.к при подстановке координат этой точки в ограничение (1) получается верное неравенство: $-0 + 0 \le 1$

Ограничение (2) в задаче определяется прямой $2x_1 + x_2 = 4$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	4
2	0

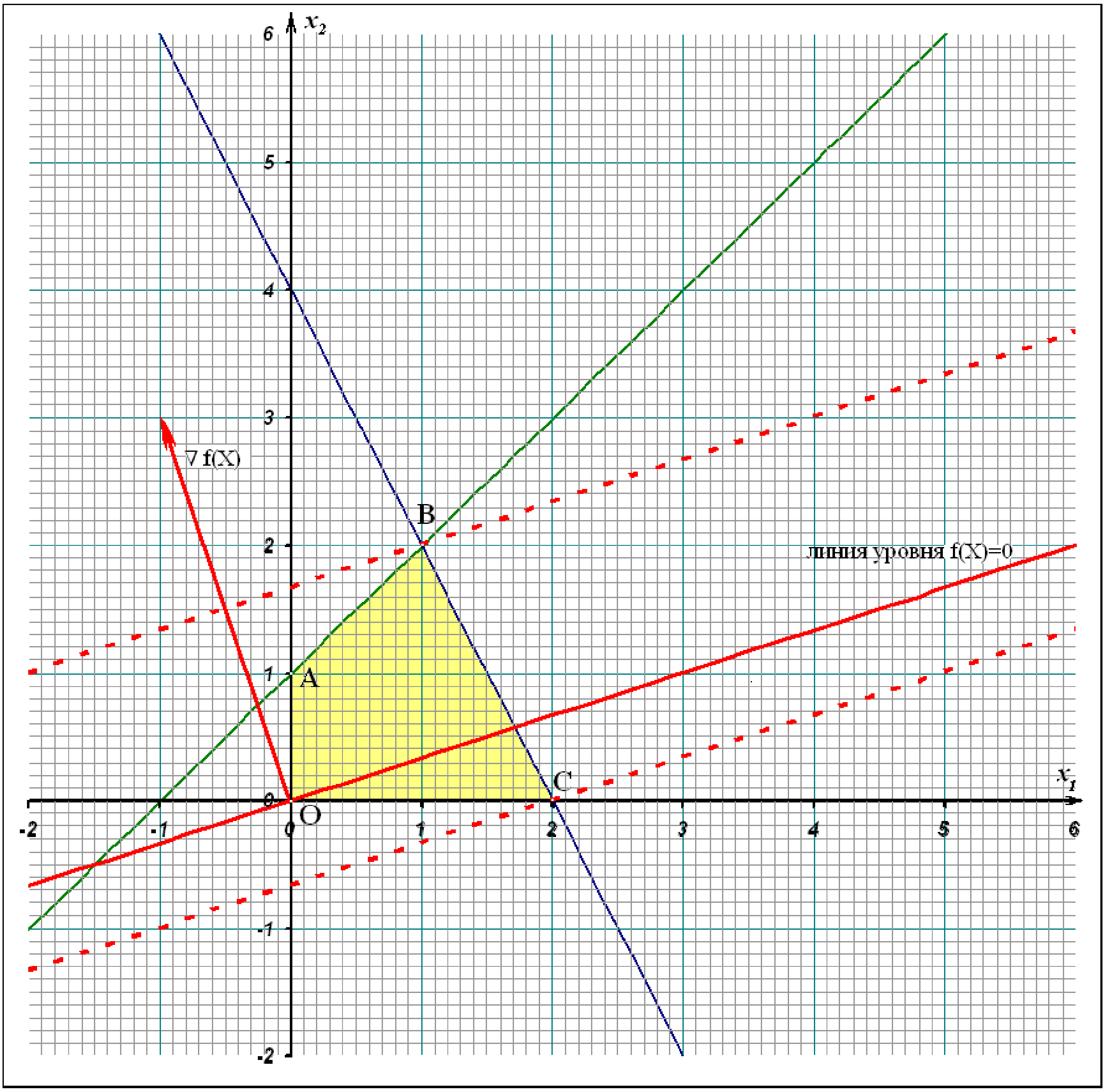
Множество допустимых решений в задаче будет ограничено этой прямой и содержать точку $(0, 0)$, т.к при подстановке координат этой точки в ограничение (2) получается верное неравенство: $2 \cdot 0 + 0 \le 4$

Ограничения (3) в задаче задают 1-ю четверть координатной плоскости.

Отметим крайние точки получившегося множества: **O, A, B, C.**

Построим градиент функции $\nabla f(X) = (-1, \quad 3)^T$ в точке с координатами $(0, 0)$

Построим линию уровня функции $f(X) = C$, проходящую через точку с координатами $(0, 0)$. Для этого найдем значение константы C, подставив координаты точки в целевую функцию: $C = -0 + 3 \cdot 0 = 0$, и затем построим прямую $-x_1 + 3x_2 = 0$.



Будем искать точку максимума функции как последнюю точку касания линии уровня функции и множества допустимых решений в направлении градиента функции. Как видно из чертежа, это точка $B=(1,\ 2)$. Таким образом, получено решение задачи поиска максимума функции:

$$x_1^*=1$$

$$x_2^*=2$$

$$f(X_{max}^*)=-1+3\cdot 2=5$$

Будем искать точку минимума функции как последнюю точку касания линии уровня функции и множества допустимых решений в направлении противоположном градиенту функции*). Как видно из чертежа, это точка $C=(2,\ 0)$. Таким образом, получено решение задачи поиска минимума функции:

$$x_1^*=2$$

$$x_2^*=0$$

$$f(X_{min}^*)=-2+3\cdot 0=-2$$

*) Для поиска минимума можно перемещать линию уровня функции в направлении градиента до первой точки касания с множеством допустимых решений.

б) Решить задачу симплекс-методом (найти максимум и минимум)

Алгоритм подготовки задачи к решению симплекс-методом

1. Симплекс-метод ищет максимум функции. Если требуется найти минимум, умножить целевую функцию на (-1) и перейти к задаче поиска максимума.

2. Правые части ограничений должны быть ≥ 0. Если правая часть ограничения < 0, умножить его левую и правую части на (-1) и изменить знак ограничения на противоположный.

3. Привести задачу к каноническому виду - перейти от задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств, вводя, если это необходимо, в каждое ограничение дополнительную переменную.
Замечание: Если ограничение представляет собой неравенство типа «$\le$» дополнительная переменная вводится с коэффициентом 1, если это неравенство типа «$\ge$» дополнительная переменная вводится с коэффициентом (-1).

Ввести дополнительные переменные в целевую функцию с коэффициентами равными 0.

4. Выписать столбцы коэффициентов при переменных в ограничениях. Если среди выписанных столбцов имеется m (по числу ограничений) базисных столбцов - столбцов единичной матрицы размерности $m \times m$, перейти к п. 6.

5. Если нужное число базисных столбцов не найдено перейти к решению М-задачи:
   - дописать недостающие столбцы искусственно;
   - поставить им в соответствие искусственные переменные;
   - переписать ограничения с учетом искусственных переменных;
   - ввести искусственные переменные в целевую функцию с коэффициентами равными $(-M)$, где M - очень большое положительное число, например 10^6.

6. Выписать переменные при базисных столбцах - эти переменные базисные. Записать начальное базисное решение: базисные переменные равны правым частям ограничений, в которые они входят, все остальные переменные равны 0.

Алгоритм вычислений с помощью симплекс-таблиц

1. Составить таблицу №1.

2. Выписать базисное решение. Вычислить симплекс-разности для небазисных переменных по формуле: $\Delta_j = C_j - C_{iБ} \cdot A_j$
Переменная, которой соответствует в столбце максимальная положительная симплекс-разность, вводится в базис. Соответствующий столбец пометим – Z.

3. Высчитать величины r_i по формуле: $r_i = \dfrac{Б_{p_i}}{Z_i}$.

Переменная, которой соответствует в строке минимальная неотрицательная величина r_i, выводится из базиса. Соответствующую строку пометим - Z. Элемент, стоящий на пересечении Z-столбца и Z -строки – ***разрешающий элемент*** - R.

4. Построить новую таблицу, пересчитав предыдущую.

Пересчет таблицы

- Заполнить в новой таблице: строку коэффициентов функции, столбец $Б_п$ и столбец $C_{iБ}$.
- Пересчитать Z-строку, содержащую разрешающий элемент и записать в новую таблицу под тем же номером по формуле:

  новая строка = старая строка / R

  Полученная строка – ***разрешающая***.

- Пересчитать все остальные строки таблицы и записать их под теми же номерами в новую таблицу по формуле:

  новая строка К = старая строка К – (разрешающая строка) * КПересчета,

здесь КПересчета – элемент, стоящий на пересечении строки K и Z-столбца в старой таблице.

5. Повторить процедуру 2-4 до тех пор, пока все симплекс-разности не станут ≤ 0.

6. Проанализировать последнее полученное базисное решение.

Замечания по процедуре счёта

№1. Каждая таблица соответствует точке пересечения ограничений на графике, причем пока в базисе есть искусственные переменные – это точки вне множества допустимых решений.

№2. В каждой таблице при текущих базисных переменных должны стоять столбцы единичной матрицы.

№3. Столбец $Б_р$ должен всегда содержать только неотрицательные элементы.

Замечания по анализу результатов счёта

№1. Если в процессе решения оказалось, что в базис вводится некоторая переменная (существует симплекс-разность >0), но среди элементов Z-столбца нет ни одного положительного, значит, задача не имеет решения вследствие не замкнутости области допустимых решений.

№2. Если в таблице, соответствующей решению задачи, в строке симплекс-разностей содержится нулей больше, чем ограничений, значит, задача имеет бесконечное множество решений, одно из которых найдено.

№3. Если при решении М-задачи найдено решение (все симплекс-разности ≤ 0), но в составе базисных переменных сталась искусственная переменная не равная 0, то исходная задача не имеет решения вследствие несовместности ограничений.

Решение:

Найдем максимум функции. Будем рассматривать задачу:

$$
\begin{aligned}
&f(X) = -x_1 + 3x_2 \to \max\\
&-x_1 + x_2 \le 1\\
&2x_1 + x_2 \le 4\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Подготовим задачу к решению симплекс-методом.

В задаче требуется найти максимум, правые части ограничений неотрицательны.

Перейдем от задачи в основной постановке к задаче в канонической. Т.к. оба ограничения – неравенства типа «≤», введем в каждое ограничение дополнительную переменную с коэффициентом 1:

$$
\begin{aligned}
&f(X) = -x_1 + 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \to \max\\
&-x_1 + x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 1\\
&2x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 4
\end{aligned}
$$

$x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$ - дополнительные переменные в задаче

Выпишем столбцы при переменных в ограничениях:

x_1	x_2	x_3	x_4
$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
		базисный столбец	базисный столбец

Базис в задаче есть, т.к. среди выписанных столбцов есть 2 базисных (столбцы единичной матрицы (2 х 2)).

Окончательно получаем задачу, подготовленную к решению симплекс-методом:

$$
\begin{aligned}
&f(X) = -x_1 + 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \to \max\\
&-x_1 + x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 1\\
&2x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 4\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

Базисные переменные в задаче: в 1-м ограничении - x_3,

во 2-м ограничении - x_4

Начальное базисное решение:

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = 0$ $\quad$ $x_3 = 1$ $\quad$ $x_4 = 4$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(0, 0)$.

Разрешающий элемент

Таблица №1

			-1	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	1	-1	1	1	0	1
0	x_4	4	2	1	0	1	4
		Δ	-1	3	0	0	

Z-строка

Z-столбец

Коэффициент пересчета

Базисное решение, соответствующее таблице №1:

$$x_3 = 1 \qquad x_1 = 0$$
$$x_4 = 4 \qquad x_2 = 0$$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = -1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 - (0+0) = -1$$

$$\Delta_2 = 3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - (0+0) = 3$$

Т.к. $\Delta_2 = \max(\Delta_1, \Delta_2)$ и $\Delta_2 > 0$, то в базис вводится переменная x_2. Соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины r_i, как отношения элементов столбца $Б_р$ к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{1}{1} = 1 \qquad r_2 = \frac{4}{1} = 4$$

Из базиса выводится переменная x_3, т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_1, соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки, находится разрешающий элемент $R = 1$.

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №2;
- запишем в новую таблицу №2 новые базисные переменные x_2 и x_4;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №2
- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем в 1-ю строку таблицы №2 – получится **разрешающая строка**;

Z-строка	(1	-1	1	1	0	) / 1
Результат	1	-1	1	1	0	

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета - 2-й элемент Z-столбца – это (1), и вычтем из 2-й строки таблицы №1, результат запишем во 2-ю строку таблицы №2:

Строка 2 таблицы №1 —	4	2	1	0	1
Разрешающая строка * (1)	1	-1	1	1	0
Результат	3	3	0	-1	1

Таблица №2

			-1	3	0	0	C_j	
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i	
3	x_2	1	-1	1	1	0	-1	
0	x_4	3	3	0	-1	1	1	Z-строка
		Δ	2	0	-3	0		
			Z-столбец					

Базисное решение, соответствующее таблице №2:

$$x_2 = 1 \qquad x_1 = 0$$

$$x_4 = 3 \qquad x_3 = 0$$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(0,\ 1)$.

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = -1 - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 - (-3 + 0) = 2$$

$$\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 - (3 + 0) = -3$$

Т.к. $\Delta_1 = \max(\Delta_1, \Delta_3)$ и $\Delta_1 > 0$, то в базис вводится переменная x_1, соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины r_i, как отношения элементов столбца $Б_р$ к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{1}{-1} = -1 \qquad r_2 = \frac{3}{3} = 1$$

Из базиса выводится переменная x_4, т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_2, соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки, находится разрешающий элемент $R = 3$.

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №3;
- запишем в новую таблицу №3 новые базисные переменные x_2 и x_1;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №3

- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем во 2-ю строку таблицы №3 – получится **разрешающая строка**;

Z-строка	(3	3	0	-1	1	) / 3
Результат	1	1	0	-1/3	1/3	

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета - 1-й элемент Z-столбца – это (-1), и вычтем из 1-й строки таблицы №2, результат запишем в 1-ю строку таблицы №3:

Строка 1 таблицы №2 —	1	-1	1	1	0
Разрешающая строка * (-1)	-1	-1	0	1/3	-1/3
Результат	2	0	1	2/3	1/3

Таблица №3

			-1	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
3	x_2	2	0	1	2/3	1/3	
-1	x_1	1	1	0	-1/3	1/3	
		Δ	0	0	-7/3	-2/3	

Базисное решение, соответствующее таблице №3:

$$x_2 = 2 \qquad x_3 = 0$$
$$x_1 = 1 \qquad x_4 = 0$$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(1,\ 2)$.

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 0 - (2 + 1/3) = -7/3$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0 - (1 - 1/3) = -2/3$$

Т.к. все симплекс-разности в таблице №3 неположительны вычисления закончены.

Проанализируем полученное базисное решение. В состав базисных переменных таблицы №3 не входят искусственные, значит получено решение задачи:

$$x_1{*} = 1$$
$$x_2{*} = 2$$
$$x_3{*} = 0$$
$$x_4{*} = 0$$

Это решение единственное, т.к строка симплекс-разностей таблицы №3 содержит два (по числу ограничений задачи) нулевых значения.

А в исходных переменных – это точка $B = (1,\ 2)$.

<u>Найдем минимум функции.</u> Будем рассматривать задачу:

$$\begin{aligned} &f(X) = -x_1 + 3x_2 \to \min \\ &-x_1 + x_2 \le 1 \\ &2x_1 + x_2 \le 4 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Перейдем к задаче поиска максимума, для этого умножим функцию на (-1), получим:

$$\begin{aligned} &f(X) = x_1 - 3x_2 \to \max \\ &-x_1 + x_2 \le 1 \\ &2x_1 + x_2 \le 4 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Т.к. данная задача отличается от решенной только коэффициентами функции, воспользуемся результатами подготовки задачи для поиска максимума исходной функции, получим:

$$\begin{aligned} &f(X) = x_1 - 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max \\ &-x_1 + x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1 \\ &2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 4 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Базисные переменные в задаче: в 1-м ограничении - x_3,

во 2-м ограничении - x_4

Начальное базисное решение:

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 1$ $x_4 = 4$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(0, 0)$

Таблица №1

			1	-3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	1	-1	1	1	0	-1
0	x_4	4	2	1	0	1	2
		Δ	1	-3	0	0	

Z-строка

Z-столбец

Базисное решение, соответствующее таблице №1:

$x_3 = 1$ $x_1 = 0$

$x_4 = 4$ $x_2 = 0$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - (0 + 0) = 1$$

$$\Delta_2 = -3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 - (0 + 0) = -3$$

Т.к. $\Delta_1 = \max(\Delta_1, \Delta_2)$ и $\Delta_1 > 0$, то в базис вводится переменная x_1, соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины r_i, как отношения элементов столбца $Б_р$ к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{1}{-1} = -1 \qquad r_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Из базиса выводится переменная x_4, т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_2, соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки, находится разрешающий элемент $R = 2$.

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №2;
- запишем в новую таблицу №2 новые базисные переменные x_3 и x_1;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №2
- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем во 2-ю строку таблицы №2 – получится **разрешающая строка**;

Z-строка	(4	2	1	0	1	) / 2
Результат	2	1	1/2	0	1/2	

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета, - 1-й элемент Z-столбца – это (-1), и вычтем из 1-й строки таблицы №1, результат запишем в 1-ю строку таблицы №2:

Строка 1 таблицы №1 –	1	-1	1	1	0
Разрешающая строка * (-1)	-2	-1	-1/2	0	-1/2
Результат	3	0	3/2	1	1/2

Таблица №2

			1	-3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	3	0	3/2	1	1/2	
1	x_1	2	1	½	0	1/2	
		Δ	0	0	-7/2	-1/2	

Базисное решение, соответствующее таблице №2:

$x_3 = 3 \qquad x_2 = 0$

$x_1 = 2 \qquad x_4 = 0$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(2,\ 0)$.

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_2 = -3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -3 - (0 + 1/2) = -7/2$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0 - (0 + 1/2) = -1/2$$

Т.к. все симплекс-разности в таблице №2 неположительны вычисления закончены.

Проанализируем полученное базисное решение. В состав базисных переменных таблицы №2 не входят искусственные, значит получено решение задачи:

$x_1* = 2$

$x_2* = 0$

$x_3* = 3$

$x_4* = 0$

Это решение единственное, т.к строка симплекс-разностей таблицы №2 содержит два (по числу ограничений задачи) нулевых значения.

А в исходных переменных – это точка $C = (2,\ 0)$.

Ответ:

Функция имеет максимум в точке B с координатами:

$x_1^* = 1$

$x_2^* = 2$

$f(X^*_{max}) = -1 + 3 \cdot 2 = 5$

Функция имеет минимум в точке C с координатами:

$x_1^* = 2$

$x_2^* = 0$

$f(X^*_{min}) = -2 + 3 \cdot 0 = -2$