

Этап №2

Методы решения ЗНП при ограничениях типа равенства

Дано: $f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 12 \rightarrow \text{extr}$
 $2x_1 + x_2 = -1$

Преобразуем ограничение к виду: $\varphi_1(X) = 0$

$$2x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow 2x_1 + x_2 + 1 = 0 \Rightarrow \varphi_1(X) = 2x_1 + x_2 + 1$$

а) Решить задачу графически

Алгоритм графического решения задачи

1. Вычислить точку касания, пользуясь условиями касания:

- точка касания принадлежит ограничению, т.е. $\varphi_1(X^{\text{Кас}}) = 0$;
- градиенты функции и ограничения в точке касания являются линейно-зависимыми, т.е. $\nabla f(X^{\text{Кас}}) = \alpha \cdot \nabla \varphi_1(X^{\text{Кас}})$

2. Построить ограничение и определить множество допустимых решений X .

3. Вычислить функцию в точке касания, определить конфигурацию и построить соответствующую линию уровня.

Решение:

Решение задачи есть точка касания ограничения и линии уровня функции $f = C$, где $C = \text{const}$. Искомая точка касания обладает следующими свойствами:

- точка касания принадлежит ограничению: $2x_1^{\text{Кас}} + x_2^{\text{Кас}} = -1$
- в точке касания градиенты функции и ограничения линейно зависимы:

$$\nabla f(X^{\text{Кас}}) = \alpha \cdot \nabla \varphi_1(X^{\text{Кас}}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1^{\text{Кас}} - 2 \\ 4x_2^{\text{Кас}} - 6 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2x_1^{\text{Кас}} - 2}{2} = \frac{4x_2^{\text{Кас}} - 6}{1}$$

Воспользовавшись условиями касания, составим систему уравнений и найдем координаты решения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - 1 = 4x_2 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases} \xrightarrow{(1)-2 \cdot (2)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ 9x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = -1 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$$

Найдена точка $X^* = (-1, 1)^T$ - точка касания ограничения и линии уровня функции.

Построим графическую иллюстрацию решения.

Ограничение в задаче - прямая с уравнением $2x_1 + x_2 = -1$, она проходит через точки:

| x_1 | x_2 |
|-------|-------|
| 0 | -1 |
| -0.5 | 0 |

Построим прямую на графике и обозначим $\varphi_1(X) = 0$.

Найдём значение функции в найденной точке касания $X^* = (-1, 1)^T$:

$$f = (-1)^2 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 - 12 = -13$$

Определим конфигурацию линии*) уровня функции, вычислив инвариант:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{т.к. } D > 0, \text{ то искомая линия уровня эллипс.}$$

Запишем уравнение линии уровня:

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 12 = -13$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 = -1$$

Приведем уравнение линии уровня к каноническому виду, выделив полные квадраты:

$$x_1^2 - 2x_1 + 2(x_2^2 - 3x_2) = -1$$

$$\underbrace{x_1^2 - 2x_1 + 1}_{(x_1-1)^2} - 1 + 2 \underbrace{(x_2^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x_2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4})}_{(x_2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}} = -1$$

$$(x_1 - 1)^2 - 1 + 2((x_2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}) = -1$$

$$(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - \frac{3}{2})^2 = -1 + 1 + \frac{9}{2}$$

$$\boxed{\frac{(x_1 - 1)^2}{\frac{9}{2}} + \frac{(x_2 - \frac{3}{2})^2}{\frac{9}{4}} = 1} \quad \text{- каноническое уравнение эллипса}$$

Центр эллипса - точка с координатами $(1, \frac{3}{2})$.

Главные диагонали эллипса прямые с уравнениями: $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{3}{2}$.

*) см. Приложение к №2

Найдем точки пересечения эллипса с главными диагоналями:

$$x_1 = 1 \Rightarrow \frac{(x_2 - 3/2)^2}{9/4} = 1 \Rightarrow (x_2 - 3/2)^2 = 9/4 \Rightarrow x_2 - 3/2 = \pm 3/2 \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 3 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

Получены точки с координатами: (1, 0) и (1, 3)

$$x_2 = 3/2 \Rightarrow \frac{(x_1 - 1)^2}{9/2} = 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = 9/2 \Rightarrow x_1 - 1 = \pm 3/\sqrt{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3.1213 \\ x_1 = -1.1213 \end{matrix}$$

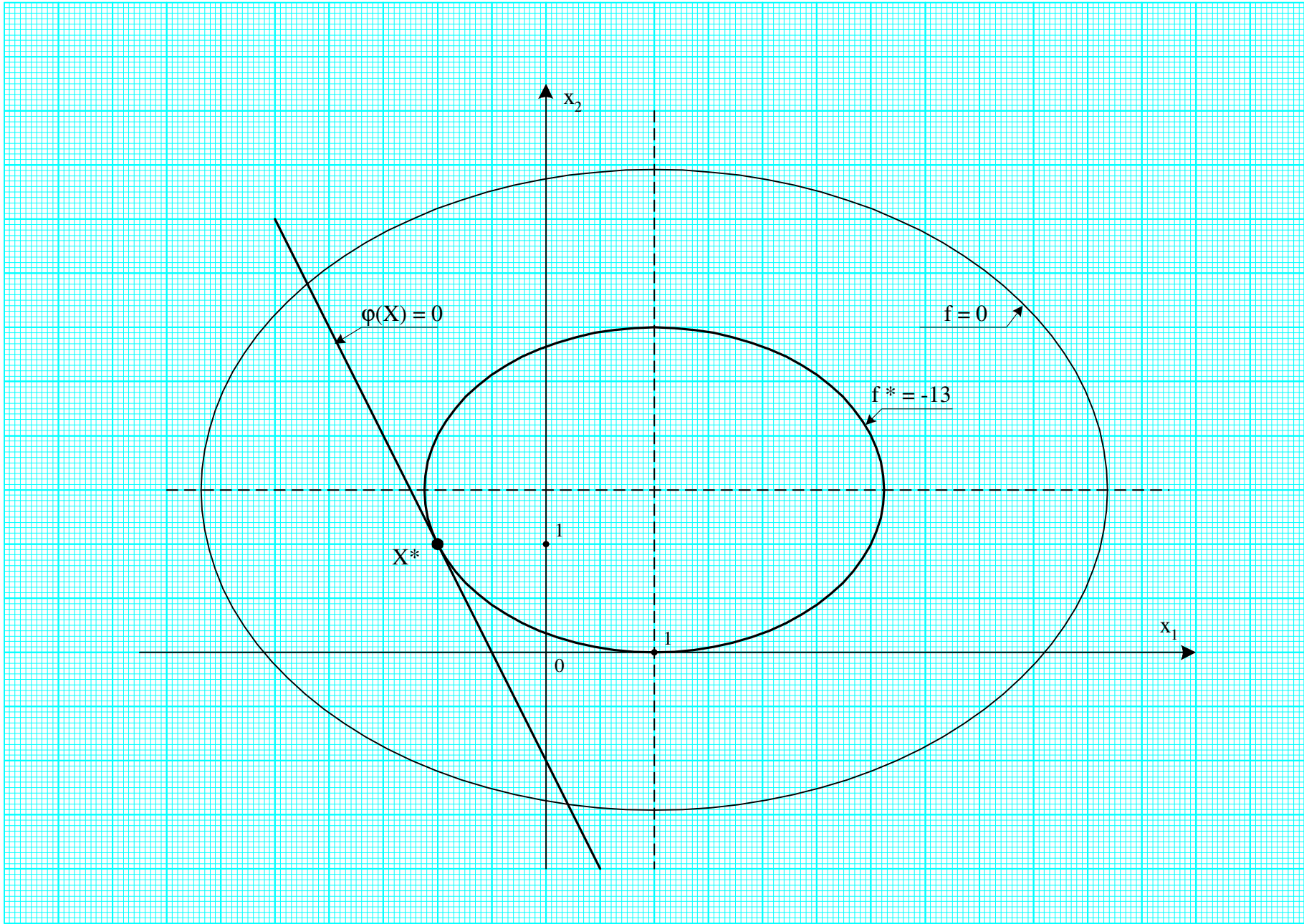
Получены точки с координатами: $(-1.1213, 3/2)$ и $(3.1213, 3/2)$

Найдем еще несколько точек для построения эллипса, выразив x_1 из канонического уравнения эллипса:

$$x_1 = \pm \sqrt{1 - \frac{(x_2 - 3/2)^2}{9/4}} \cdot 3/2 + 1$$

| x_2 | x_1 | x_1 |
|-------|--------|---------|
| 0 | 1 | 1 |
| 0.5 | 2.5811 | -0.5811 |
| 1 | 3 | -1 |
| 1.5 | 3.1213 | -1.1213 |
| 2 | 3 | -1 |
| 2.5 | 2.5811 | -0.5811 |
| 3 | 1 | 1 |

Построим на чертеже линию уровня функции.



б) Решить задачу методом множителей Лагранжа (аналитически отыскать экстремум функции при ограничениях типа равенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий)

Алгоритм решения задачи методом множителей Лагранжа

1. Записать классическую функцию Лагранжа: $L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(X)$

2. Записать необходимые условия экстремума ФМП при ограничениях типа равенств:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j(X)}{\partial x_i} = 0, & i = 1..n \\ \varphi_j(X) = 0, & j = 1..m \end{cases}$$

3. Решить полученную систему. Решение системы – условно-стационарные точки (X^*, λ^*) .

4. Проверить достаточные условия экстремума в каждой точке (X^*, λ^*) , для этого

Записать второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$

Записать дифференциалы ограничений $d\varphi_j(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j(X)}{\partial x_i} dx_i$

В каждой точке (X^*, λ^*)

4.1. Вычислить второй дифференциал $d^2L(X^*, \lambda^*)$

4.2. Записать условия равенства 0 дифференциалов ограничений в каждой точке X^* :

$$d\varphi_j(X^*) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_{X^*} \cdot dx_i = 0, \quad j = 1..m$$

4.3. Используя уравнения из п. 4.2, выразить любые m дифференциалов переменных через оставшиеся $(n - m)$ и подставить их в выражение для $d^2L(X^*, \lambda^*)$.

4.4. Определить знак $d^2L(X^*, \lambda^*)$:

- если $d^2L(X^*, \lambda^*) > 0$ при $dx_i \neq 0$, то точка X^* - точка условного локального минимума в задаче;
- если $d^2L(X^*, \lambda^*) < 0$ при $dx_i \neq 0$, то точка X^* - точка условного локального максимума в задаче.

Решение:

Запишем классическую функцию Лагранжа:

$$L(X, \lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 12 + \lambda_1(2x_1 + x_2 + 1)$$

Запишем необходимые условия экстремума функции при ограничениях типа равенства:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial x_2} = 4x_2 - 6 + \lambda_1 = 0 \\ \varphi_1(X) = 2x_1 + x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2 + 2\lambda_1 = 0 \\ 4x_2 - 6 + \lambda_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 = 2 \\ 4x_2 + \lambda_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \xrightarrow{(1)-(3)} \begin{cases} -x_2 + 2\lambda_1 = 3 \\ 4x_2 + \lambda_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \xrightarrow{4 \cdot (1) + (2)}$$

$$\begin{cases} 9\lambda_1 = 18 \\ 4x_2 + \lambda_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ x_2 = \frac{6 - \lambda_1}{4} \\ x_1 = \frac{-1 - x_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^* = 2 \\ x_2^* = 1 \\ x_1^* = -1 \end{cases}$$

Таким образом, получено решение системы – точка с координатами $(X^*, \lambda^*) = (-1, 1, 2)^T$ - условно-стационарная точка функции.

Определим характер полученной точки с помощью достаточных условий экстремума.

Запишем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L(X, \lambda)}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L(X, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(X, \lambda)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L(X, \lambda)}{\partial x_2^2} = 4$$

$$d^2 L(X, \lambda) = 2(dx_1)^2 + 0 \cdot dx_1 \cdot dx_2 + 0 \cdot dx_1 \cdot dx_2 + 4(dx_2)^2$$

$$d^2 L(X, \lambda) = 2(dx_1)^2 + 4(dx_2)^2$$

Запишем дифференциал ограничения φ_1 :

$$\frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} = 2 \quad \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad d\varphi_1(X) = 2 \cdot dx_1 + 1 \cdot dx_2$$

В точке $X^* = (-1, 1, 2)$ имеем:

$d^2L(X^*) = 2(dx_1)^2 + 4(dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(X^*) = 2 \cdot dx_1 + 1 \cdot dx_2 = 0$,
получим:

$$dx_2 = -2dx_1 \quad \Rightarrow \quad d^2L(X^*) = 18(dx_1)^2 > 0 \text{ при } dx_1 \neq 0$$

Следовательно, в точке $X^* = (-1, 1)^T$ выполнены достаточные условия локального условного минимума.

Ответ: функции $f(X)$ при ограничении $2x_1 + x_2 = -1$ имеет условный локальный минимум в точке с координатами $X^* = (-1, 1)^T$.

в) Найти решение задачи методом исключений**Алгоритм решения задачи методом исключений**

1. Разрешить систему ограничений относительно любых m переменных.
2. Подставить полученные выражения в исходную функцию и перейти к задаче безусловной оптимизации.
3. Решить полученную задачу безусловной оптимизации - найти стационарные точки и проверить достаточные условия.
4. Вернуться к исходной задаче и, используя решение задачи безусловной оптимизации, найти значения недостающих переменных.

Решение:

Разрешим ограничение относительно переменной x_2 : $x_2 = -1 - 2x_1$, и подставим выражение для x_2 в исходную функцию:

$$\begin{aligned} f(X) &= \tilde{f}(x_1) = \\ &= x_1^2 + 2(-1 - 2x_1)^2 - 2x_1 - 6(-1 - 2x_1) - 12 = x_1^2 + 2(1 + 4x_1 + 4x_1^2) - 2x_1 + 6 - 12x_1 - 12 = \\ &= 9x_1^2 + 18x_1 - 4 \end{aligned}$$

Найдем безусловный экстремум функции $\tilde{f}(x_1)$:

$$\frac{d\tilde{f}(x_1)}{dx_1} = 18x_1 + 18 \Rightarrow 18x_1 + 18 = 0 \Rightarrow x_1^* = -1$$

$$\frac{d^2\tilde{f}(x_1)}{d(x_1)^2} = 18 > 0 \Rightarrow \text{функция } \tilde{f}(x_1) \text{ имеет минимум при } x_1^* = -1$$

Найдем оптимальное значение x_2^* : $x_2^* = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$

Окончательно, найдена точка условного минимума функции $f(X)$ с координатами

$$X^* = (-1, 1)^T.$$

Ответ: функции $f(X)$ при ограничении $2x_1 + x_2 = -1$ имеет условный локальный минимум в точке с координатами $X^* = (-1, 1)^T$.

з) Найти решение задачи методом штрафной функции**Алгоритм аналитического решения задачи методом штрафной функции**

1. Записать штрафную функцию: $F(X, r) = f(X) + \frac{r}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \varphi_j^2(X)$
2. Записать необходимые условия экстремума для штрафной функции:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(X, r)}{\partial x_i} = 0 & i = 1..n \end{cases}$$
3. Найти решение полученной системы: $X^*(r)$. Решение системы зависит от параметра r .
4. Найти условно-стационарную точку в задаче: $X^* = \lim_{r \rightarrow \infty} X^*(r)$.
5. Составить матрицу Гессе для штрафной функции: $H(X^*(r)) = \left(\frac{\partial^2 F(X, r)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$
6. Исследовать знакоопределенность матрицы при $r \rightarrow \infty$ по критерию Сильвестра.
7. Записать оценку множителей Лагранжа: $\lambda_j^* = \lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \varphi_j(X^*(r)) \quad j = 1..m$.

Решение:

Составим штрафную функцию:

$$F(X, r) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 12 + \frac{r}{2} (2x_1 + x_2 + 1)^2$$

Внимание ! В случае поиска условного максимума,

используют штрафную функцию вида: $F(X, r) = f(X) - \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m \varphi_j^2(X)$

Запишем необходимые условия безусловного минимума штрафной функции:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(X, r)}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 + r \cdot (2x_1 + x_2 + 1) \cdot 2 = 0 \\ \frac{\partial F(X, r)}{\partial x_2} = 4x_2 - 6 + r \cdot (2x_1 + x_2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Преобразуем исходную систему к виду: $\begin{cases} (2 + 4r) \cdot x_1 + 2r \cdot x_2 = 2 - 2r \\ 2r \cdot x_1 + (4 + r) \cdot x_2 = 6 - r \end{cases}$

Разрешим полученную систему относительно переменных x_1, x_2 методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 + 4r & 2r \\ 2r & 4 + r \end{vmatrix} = (2 + 4r) \cdot (4 + r) - 4r^2 = 8 + 16r + 2r + 4r^2 - 4r^2 = 18r + 8$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2-2r & 2r \\ 6-r & 4+r \end{vmatrix} = (2-2r) \cdot (4+r) - 2r(6-r) = 8 - 8r + 2r - 2r^2 - 12r + 2r^2 = -18r + 8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+4r & 2-2r \\ 2r & 6-r \end{vmatrix} = (2+4r) \cdot (6-r) - 2r(2-2r) = 12 + 24r - 2r - 4r^2 - 4r + 4r^2 = 18r + 12$$

Тогда $x_1^*(r) = \frac{-18r+8}{18r+8}$, - стационарная точка штрафной функции.

$$x_2^*(r) = \frac{18r+12}{18r+8}$$

Найдем координаты условного экстремума исходной задачи как предел решения задачи поиска безусловного экстремума штрафной функции:

$$x_1^* = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-18r+8}{18r+8} = -1, \quad x_2^* = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{18r+12}{18r+8} = 1$$

Получена точка $X^* = (-1, 1)^T$ - точка условного экстремума исходной задачи.

Запишем матрицу Гессе для штрафной функции: $H(X, r) = \begin{pmatrix} 2+4r & 2r \\ 2r & 4+r \end{pmatrix}$

$$\Delta_1 = 2 + 4r > 0 \text{ при } r > 0$$

$$\Delta_2 = (2+4r)(4+r) - 4r^2 = 8 + 16r + 2r + 4r^2 - 4r^2 = 8 + 18r > 0 \text{ при } r > 0$$

Следовательно, по критерию Сильвестра, достаточные условия минимума функции $F(X, r)$ выполняются, и значит полученная точка $X^* = (-1, 1)^T$ - точка условного локального минимума функции $f(X)$.

Запишем оценку λ_1^* :

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(2 \cdot \frac{-18r+8}{18r+8} + \frac{18r+12}{18r+8} + 1 \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(\frac{-36r+16+18r+12+18r+8}{18r+8} \right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(\frac{36}{18r+8} \right) = 2 \end{aligned}$$

Внимание !

В случае поиска условного максимума,

используют формулу: $\lambda_j^* = -\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \varphi_j(X^*(r))$

Ответ: функции $f(X)$ при ограничении $2x_1 + x_2 = -1$ имеет условный локальный минимум в точке с координатами $X^* = (-1, 1)^T$.