# Лекция № 10

## *Интерполяция и аппроксимация функций*

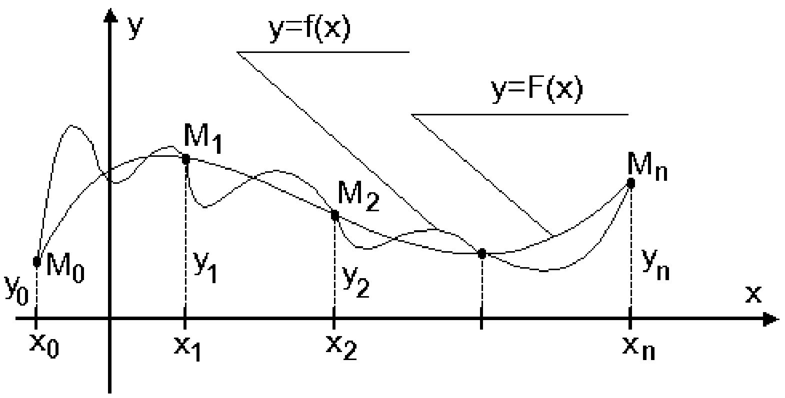
Интерполяция - изменение (лат.)
Аппроксимация - приближение (лат.)

## *Интерполирование функций*

Будем считать данную функцию $f(x)$ и некоторую функцию $F(x)$ близкими, если они совпадают на заданной системе точек $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$. Эти точки называют узлами интерполяции.

### Постановка задачи интерполирования

На отрезке $[a, b]$ заданы $n+1$ точка $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ и значение некоторой функции $f(x)$ в этих точках : $f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1 \quad \ldots\ldots \quad f(x_n) = y_n$,
Требуется построить функцию $F(x)$, принадлежащую определенному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т.е.
$F(x_0) = y_0, \quad F(x_1) = y_1 \quad \ldots\ldots \quad F(x_n) = y_n$,




Геометрически это означает, что требуется найти кривую $y = F(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через систему точек $M_i = (x_i, y_i)$.

В такой постановке задача имеет бесконечное множество решений. Но задача становится однозначной, если вместо любой функции $F(x)$ искать полином $Q_m(x)$, где

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m$$

### Интерполяционный полином Лагранжа

Как известно, существует единственный полином степени не выше $n$, принимающий в точках $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ заданные значения, поэтому можно положить $m = n$ и $Q_m(x) = Q_n(x)$. Коэффициенты $a_i$ полинома $Q_n(x)$ можно определить из системы уравнений :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Определитель такой системы есть так называемый определитель Вандермонда :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots\ldots. & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots. & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots. & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots. & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le p < q \le n} (x_q - x_p) \ne 0$$

и следовательно система имеет единственное решение.

Полином $L_n(x)$, коэффициенты которого определяются из системы, называют *интерполяционным полиномом Лагранжа* для функции $f(x)$, и может быть записан в явном виде :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} y_i$$

Эта интерполяционная формула справедлива в случае произвольно заданных узлов интерполяции.

*Остаточный член* интерполяционного полинома Лагранжа (погрешность вычисления приближенного значения функции в точке $x$) имеет вид :

$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$, где $\xi$- внутренняя точка минимального отрезка, содержащего $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ и точку $x$.

**Пример 1.**

Дано: функция, заданная таблично:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 5 | 8 | 10 | 5 |

Полином Лагранжа :

$$L(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \cdot 5 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \cdot 8 + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \cdot 10 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \cdot 5 =$$
$$= -x^3 + 5.5x^2 - 6.5x + 7$$

**Замечание.** В случае интерполирования полиномами, все интерполяционные формулы получаются из формулы Лагранжа при соответствующем выборе узлов.

В случае равноотстоящих узлов интерполяции используют интерполяционные формулы Ньютона.

## 1-я интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для равноотстоящих значений независимой переменной :

$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1 \dots n$, где $h$ - шаг интерполяции (расстояние между узлами)

Тогда интерполяционный полином Ньютона (1-я формула) будет иметь вид :

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots\dots$$

$$\dots\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

здесь $\Delta^j y_i$ - конечная разность порядка $j$.

Полагая $\frac{x - x_0}{h} = q$, можно интерполяционный полином Ньютона записать в следующем виде :

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{q(q-1)(q-2)\Delta^3 y_0}{3!} + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)\Delta^n y_0}{n!}$$

Конечные разности (формулы для вычисления)

$$\Delta y_i = \Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta^2 f(x_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$
$$\Delta^3 y_i = \Delta^3 f(x_i) = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$$
..................................................
$$\Delta^n y_i = \Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

Для вычисления конечных разностей удобно использовать таблицы. Приведем пример на случай 4 узлов интерполяции :

| $x$ | $y$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $\Delta y_0$ | $\Delta^2 y_0$ | $\Delta^3 y_0$ |
| $x_1$ | $y_1$ | $\Delta y_1$ | $\Delta^2 y_1$ | |
| $x_2$ | $y_2$ | $\Delta y_2$ | | |
| $x_3$ | $y_3$ | | | |

В 1-й интерполяционной формуле Ньютона используется первая строка таблицы конечных разностей.

Остаточный член интерполяционного полинома Ньютона :

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Причем, если $f(x)$ задана таблично, то $f^{(n+1)}(\xi) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$.

***Пример 2.***

Функция задана таблично :

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 8 | 10 | 5 |

1-я формула Ньютона:

Таблица конечных разностей :

| $x$ | $y$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | -1 | -6 |
| 2 | 8 | 2 | -7 | |
| 3 | 10 | -5 | | |
| 4 | 5 | | | |

$$h = 2 - 1 = 1$$

$$P(x) = 5 + \frac{3}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{-6}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = -x^3 + 5.5x^2 - 6.5x + 7$$

**Замечание**. В случае равноотстоящих узлов полином Лагранжа переходит в полином Ньютона.

**Использование интерполяционных формул**

Интерполяционные формулы используют для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ для $x$ отличных от узлов интерполяции.
Различают :

а) интерполирование, когда $x \in [x_0, x_n]$

б) экстраполирование, когда $x \notin [x_0, x_n]$

## *Аппроксимация*

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $Q_m(x)$ значительно меньше числа узлов $n+1$. В этом случае интерполирование, вообще говоря, становится невозможным и приходится прибегать к иным приемам построения приближающих полиномов. Обычно здесь используют точечный метод наименьших квадратов. Согласно этому способу за меру отклонения полинома

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...... + a_m x^m$$

от данной функции $f(x)$ на множестве точек $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ принимают величину :

$S_m = \sum_{i=0}^{n} [Q_m(x_i) - y_i]^2$ , где $y_i = f(x_i)$

равную сумме квадратов отклонений полинома $Q_m(x)$ от функции $f(x)$ ) на заданной системе точек. $S_m$ - это функция коэффициентов $a_0, a_1, a_2 \ldots a_m$, эти коэффициенты надо подобрать так, чтобы величина $S_m$ была наименьшей. Полученный полином называют ***аппроксимирующим*** для данной функции, а процесс построения этого полинома - ***точечной квадратичной аппроксимацией функции***.

Для решения задачи точечной квадратичной аппроксимации найдем частные производные от величины:

$$S_m = \sum_{i=0}^{n}[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i]^2$$

по всем переменным $a_0, a_1, a_2 \ ... \ a_m$.

Приравнивая эти производные нулю, получим для определения неизвестных $a_0, a_1, a_2 \ ... \ a_m$ систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial S_m}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i) = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial S_m}{\partial a_m} = \sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)x_i = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial S_m}{\partial a_m} = \sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)x_i^m = 0 \end{cases}$$

Введем обозначения :

$$s_k = x_0^k + x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k, \quad k = 0, 1, 2.......$$
$$t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + x_2^k y_2 + ... + x_n^k y_n, \quad k = 0, 1, 2.......$$

Обычно для удобства необходимые величины вычисляют по таблице :

| $x^0$ | $x$ | $x^2$ | $x^3$ | ... | $x^{2m}$ | $y$ | $xy$ | $xy^2$ | ... | $x^m y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_0$ | $x_0^2$ | $x_0^3$ | ... | $x_0^{2m}$ | $y_0$ | $x_0 y_0$ | $x_0^2 y_0$ | ... | $x_0^m y_0$ |
| 1 | $x_1$ | $x_1^2$ | $x_1^3$ | ... | $x_1^{2m}$ | $y_1$ | $x_1 y_1$ | $x_1^2 y_1$ | ... | $x_1^m y_1$ |
| 1 | $x_2$ | $x_2^2$ | $x_2^3$ | ... | $x_2^{2m}$ | $y_2$ | $x_2 y_2$ | $x_2^2 y_2$ | ... | $x_2^m y_2$ |
| | | | | ... | | | | | ... | |
| 1 | $x_n$ | $x_n^2$ | $x_n^3$ | ... | $x_n^{2m}$ | $y_n$ | $x_n y_n$ | $x_n^2 y_n$ | ... | $x_n^m y_n$ |
| $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | ... | $s_{2m}$ | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ | ... | $t_m$ |

Тогда, используя введенные обозначения, будем иметь систему :

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + ... + a_m s_m = t_0 \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 + a_2 s_3 + ... + a_m s_{m+1} = t_1 \\ a_0 s_2 + a_1 s_3 + a_2 s_4 + ... + a_m s_{m+2} = t_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 s_m + a_1 s_{m+1} + a_2 s_{m+2} + ... + a_m s_{2m} = t_m \end{cases}$$

Можно доказать, что если среди точек $x_0, x_1, x_2 \ ... \ x_n$ нет совпадающих и $m \le n$, то определитель системы отличен от нуля, и, следовательно эта система имеет единственное решение.
Полином с коэффициентами $a_0, a_1, a_2 \ ... \ a_m$, полученными как решение системы, обладает минимальным квадратичным отклонением.
Замечание. Если $m = n$, то аппроксимирующий полином $Q_m(x)$ совпадает с полиномом Лагранжа для системы точек $x_0, x_1, x_2 \ ... \ x_n$.

**Пример 3.**

Функция задана таблично :

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 8 | 10 | 5 |

Аппроксимирующий полином 2-го порядка

Будем искать полином $Q_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Коэффициенты системы для определения $a_0$, $a_1$, $a_2$

| $x^0$ | $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $y$ | $xy$ | $xy^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 8 | 16 | 32 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 10 | 30 | 90 |
| 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 5 | 20 | 80 |
| $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ |
| 4 | 10 | 30 | 100 | 354 | 28 | 71 | 207 |

Тогда :

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 + 30a_2 = 28 \\ 10a_0 + 30a_1 + 100a_2 = 71 \\ 30a_0 + 100a_1 + 354a_2 = 207 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = -3.5 \\ a_1 = 10.2 \\ a_2 = -2 \end{matrix} \Rightarrow Q_2(x) = -3.5 + 10.2x - 2x^2$$