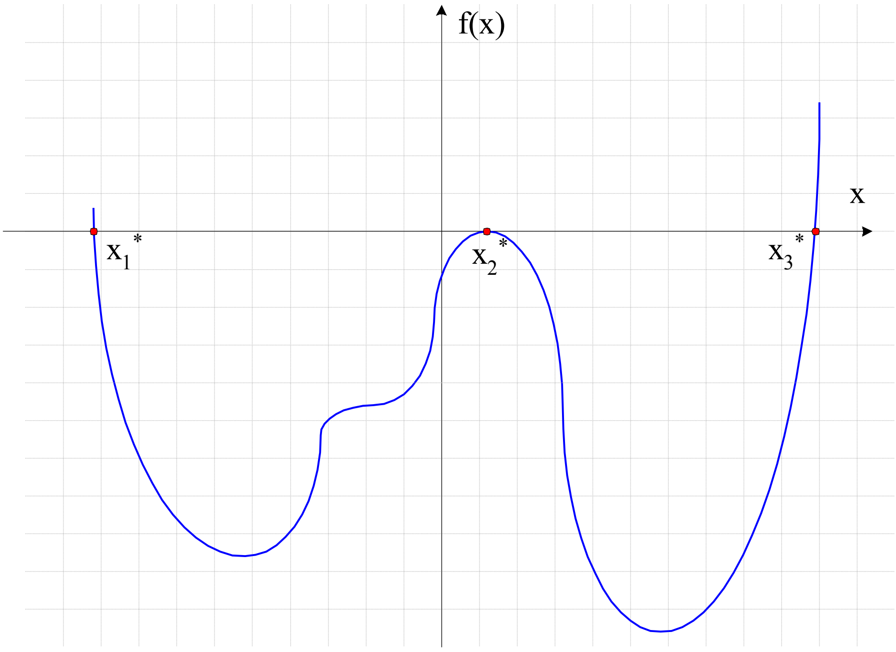
Лекция № 9

Методы решения нелинейных уравнений

Постановка задачи

Дано: нелинейное уравнение $f(x)=0$, где – $f(x)$ функция определенная и непрерывная на некотором промежутке.

Требуется найти корни уравнения, т.е. числа $x_1^*, x_2^*, x_3^* ... x_n^*$, которые при подстановке в уравнение обращают его в тождество.



Определение. Число x^* - есть *корень уравнения кратности* k, если при $x = x^*$ вместе с функцией $f(x)$ обращаются в нуль ее производные до $(k-1)$ порядка включительно, т.е.:

$$f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = ... = f^{(k-1)}(x^*) = 0$$

Корень кратности $k=1$ называют *простым*.

Так, на чертеже корни x_1^* и x_3^* - простые, а корень x_2^* - кратный.

На практике иногда бывает выгодно исходное уравнение заменить равносильным: $f_1(x) - f_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) = f_2(x)$, где функции $f_1(x), f_2(x)$ -более простые, чем $f(x)$

Тогда – если корни исходного уравнения -это точки пересечения графика $f(x)$ с осью Ox, то корни равносильного - абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x), f_2(x)$.

В более общем случае, решения уравнения могут быть найдены численно с заданной точностью.

Численное решение осуществляется в два этапа:

Первый этап. Находятся отрезки $[a,b]$, внутри каждого из которых содержится один простой или кратный корень. Этот этап называется *отделение корней*. По сути он дает грубое приближение искомого корня.

Второй этап. Грубое приближение каждого корня уточняется до заданной точности одним из численных методов. Этот этап называется *уточнение корней*.

Отделение корней уравнения

Для отделения корней применяется следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$, определяющая уравнение, на концах отрезка $[a,b]$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то на отрезке $[a,b]$ содержится по крайней мере один корень уравнения. Если же $f(x)$ непрерывна и дифференцируема и ее первая производная сохраняет знак внутри отрезка $[a,b]$, т.е. $\underset{[a,b]}{\operatorname{sign}} f'(x)=\text{const}$, то на $[a,b]$ находится только один корень уравнения.

В вычислительной практике обычно используют следующие способы отделения корней:
1) средствами математического анализа с помощью исследования функций и построения графиков;
2) средствами машинной графики;
3) заменой уравнения на равносильное, а затем построения графиков.

<u>Последовательность отделения простых корней с помощью исследования функций и построения графиков</u>

1) Построить график функции $f(x)$.

2) Найти стационарные точки функции, решив уравнение $f'(x)=0$. Стационарные точки имеют абсциссы: $x_1^{\text{ст}}, x_2^{\text{ст}}, x_3^{\text{ст}} \ldots x_m^{\text{ст}}$.

3) Исследовать отрезки $[x_i^{\text{ст}}, x_{i+1}^{\text{ст}}]$. Если $f(x_i^{\text{ст}})\cdot f(x_{i+1}^{\text{ст}})<0$, то $[a,b]\subset(x_i^{\text{ст}}, x_{i+1}^{\text{ст}})$. Если условие не выполняется на $[x_i^{\text{ст}}, x_{i+1}^{\text{ст}}]$ - корня нет.

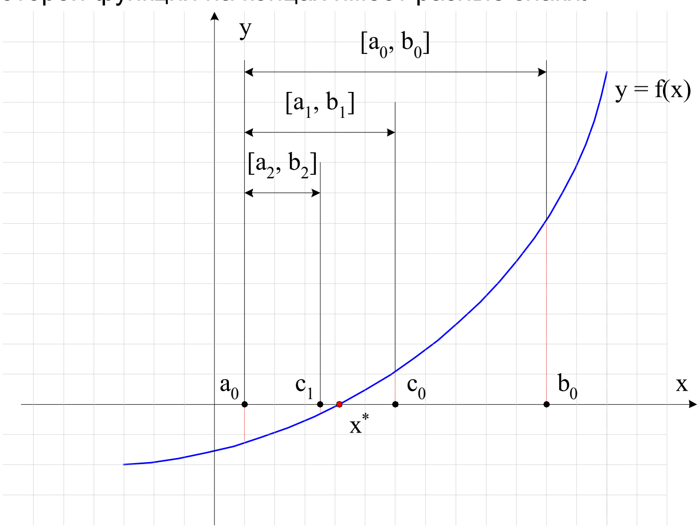
4) Отрезки $[a,b]$ на интервалах $]-\infty, x_1^{\text{ст}}]$ и $[x_m^{\text{ст}},\infty[$ - конкретизировать с помощью графика, исходя из условия $f(a)\cdot f(b)<0$.

Уточнение корней уравнения

Метод половинного деления (метод дихотомии)

Пусть на отрезке $[a_0,b_0]$ отделен корень уравнения. Отрезок $[a_0,b_0]$ называют начальным интервалом неопределенности.

Процедура уточнения корня заключается в построении последовательности вложенных друг в друга отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения. Для этого находится середина текущего интервала неопределенности и в качестве следующего интервала неопределенности выбирается та половина отрезка для которой функция на концах имеет разные знаки.



Процедура деления отрезка пополам заканчивается когда длина текущего интервала неопределенности становится меньше заданной величины ε. За значение корня берется середина последнего интервала неопределенности.

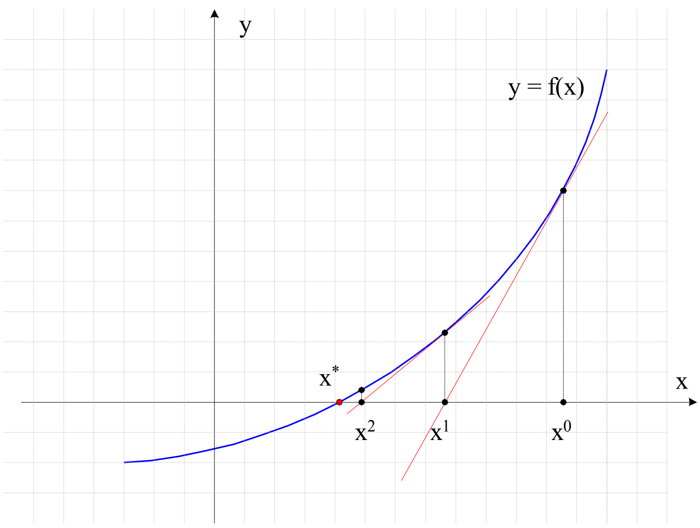
Алгоритм решения задачи

1. Определить начальный интервал неопределенности
2. Найти середину выбранного отрезка $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}, \quad k = 0,1,2...$
3. Если $f(a_k) \cdot f(c_k) < 0$, то $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$, иначе $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$
4. Повторять процедуру 2-4 до тех пор пока $b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$, тогда $x^* = \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

Метод имеет линейную, но безусловную сходимость. Его погрешность за каждую итерацию уменьшается вдвое. Недостатком метода является то, что он не может использоваться для нахождения корней четной кратности.

Метод Ньютона (метод касательных)

Задается начальное приближение x^0. Далее проводится касательная к кривой $y = f(x)$ в точке x^0. В качестве следующего приближения выбирается точка пересечения этой касательной с осью абсцисс. Процесс построения касательных и нахождения точек пересечения с осью продолжается до тех пор, пока разность между двумя последовательными приближениями не станет меньше заданной величины ε.



Описанная процедура уточнения корня задается следующим соотношением:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k = 0,1,2.....$$

Метод быстро сходится (имеет квадратичную сходимость), однако метод является эффективным при весьма жестких ограничениях на характер функции $f(x)$.

Теорема (о достаточных условиях сходимости метода Ньютона)

Пусть выполняются следующие условия:
- Функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на $[a, b]$.
- Отрезку $[a, b]$ принадлежит только один простой корень x^*, так что $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Производные $f'(x), f''(x)$ на сохраняют знак на $[a, b]$.
- Начальное приближение удовлетворяет неравенству $f(x^0) \cdot f''(x^0) > 0$.

Тогда с помощью метода Ньютона можно вычислить корень уравнения с любой точностью.

Алгоритм решения задачи

1. На отрезке $[a, b]$ отделения единственного корня уравнения задать начальное приближение x^0.

Проверить условие сходимости $f(x^0) \cdot f''(x^0) > 0$ для выбранного приближения, если условие не выполнено задать другое начальное приближение.

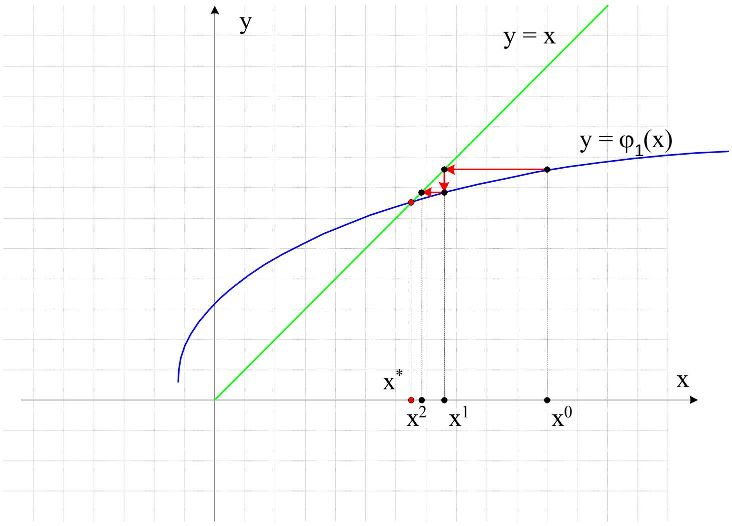
2. Вычислить приближения корня по формуле $x^{k+1} = x^k - \dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k = 0,1,2.....$

3. Повторять процедуру 2 до тех пор пока $\left|x^{k+1} - x^k\right| < \varepsilon$, тогда $x^* = x^{k+1}$

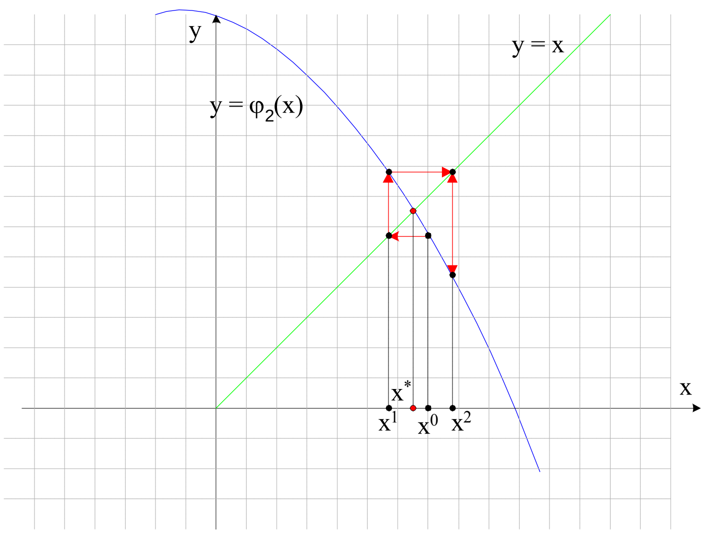
Метод простых итераций

Процедура нахождения корня методом простых итераций заключается в замене уравнения равносильным вида $x = \varphi(x)$ (3) и использовании затем рекуррентного соотношения $x^{k+1} = \varphi(x^k)$ для уточнения корня.
Задача т.о. сводится к нахождению абсциссы точки пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$

Рассмотрим два случая преобразования уравнения к равносильному виду: $x = \varphi_1(x)$ и $x = \varphi_2(x)$



Сходящийся процесс простых итераций



Расходящийся процесс простых итераций

Как видно из чертежа в первом случае получен сходящийся процесс, а во втором расходящийся.
Т.о. преобразование $x=\varphi(x)$ может быть осуществлено различными путями, но для сходимости нужно обеспечить выполнение условия $|\varphi'(x)| \le \chi < 1$.

Теорема (о достаточном условии сходимости метода простых итераций)

Пусть выполнены условия:

- Функция $\varphi(x)$ имеет производные для всех $x \in [a, b]$
- Существует число $\chi \quad (0 \le \chi < 1, \chi = \text{const})$, такое что $|\varphi'(x)| \le \chi$ для всех $x \in [a, b]$

Тогда последовательность, определяемая алгоритмом $x^{k+1} = \varphi(x^k)$ сходится к решению уравнения, т.е. $x^k \to x^*$ при $k \to \infty$.

<u>Алгоритм решения задачи</u>

1. Преобразовать уравнение к равносильному виду $x = \varphi(x)$. Проверить условие сходимости $|\varphi'(x)| \le \chi$ на отрезке $[a, b]$. Для этого построить график $\varphi'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если условие не выполнено найти другое преобразование $x = \varphi(x)$.
2. Задать начальное приближение x^0.
3. Вычислить приближения корня по формуле $x^{k+1} = \varphi(x^k), \quad k = 0,1,2$
4. Повторять процедуру 3 до тех пор пока $|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$, тогда $x^* = x^{k+1}$

Замечание. В качестве эквивалентного преобразования исходного уравнения можно взять следующее:

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = x + \alpha \cdot f(x)$$

Пример 1.

Уточнить корень уравнения $x^2 - 1 = 0$ методом половинного деления на отрезке $[0.5, \quad 3]$.
Точность счета $\varepsilon = 0.1$

<u>Решение</u>

k	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$	$\Delta x = b - a$
0	0.5	3	-0.75	8	1.75	2.0625	2.5
1	0.5	1.75	-0.75	2.0625	1.125	0.265625	1.25
2	0.5	1.125	-0.75	0.265625	0.8125	-0.33984	0.625
3	0.8125	1.125	-0.33984375	0.265625	0.96875	-0.06152	0.3125
4	0.96875	1.125	-0.06152344	0.265625	1.046875	0.095947	0.15625
5	0.96875	1.046875	-0.06152344	0.095947266	1.007813	0.015686	0.078125

Получено решение $x^* \cong 1.007813$

Пример 2.

Уточнить корень уравнения $x^2 - 1 = 0$ методом половинного деления на отрезке $[0.5, \quad 3]$.
Точность счета $\varepsilon = 0.1$

<u>Решение</u>

Выберем в качестве начального приближения $x^0 = 3$
Проверим условия сходимости метода Ньютона, исходя из того, что условия 1)-3) теоремы на заданном отрезке выполнены:
$f(3) = 9 - 1 = 8, \quad f''(3) = 2$, значит $f(3) \cdot f''(3) > 0$

k	x	f(x)	f′(x)	Δx
0	3	8	6	
1	1.666666667	1.777777778	3.333333333	1.333333333
2	1.133333333	0.284444444	2.266666667	0.533333333
3	1.007843137	0.015747789	2.015686275	0.125490196
4	1.000030518	6.1037E-05	2.000061036	0.007812619

Получено решение $x^* \cong 1.000030518$

Пример 3.

Уточнить корень уравнения $x^2 - 1 = 0$ методом простых итераций на отрезке $[0.5, \quad 1.5]$.
Точность счета $\varepsilon = 0.1$

Решение

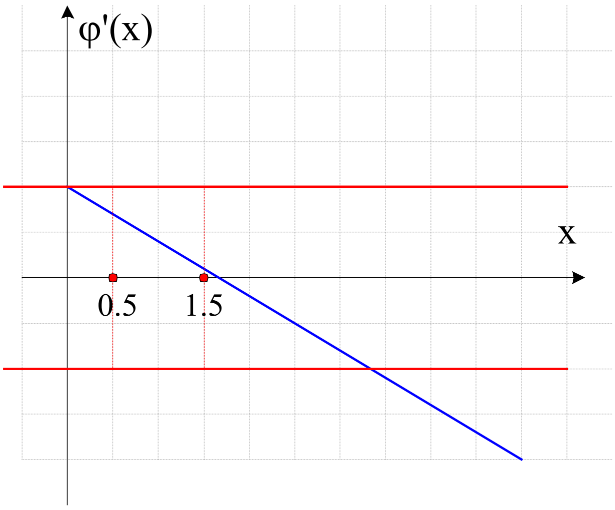
Преобразуем исходное уравнение к виду: $x = x - 0.3 \cdot (x^2 - 1)$

Найдем производную функции $\varphi(x)$: $\varphi'(x) = 1 - 0.6x$

Построим график функции $\varphi'(x) = 1 - 0.6x$ и исследуем ее на отрезке $[0.5, \quad 1.5]$

$\varphi'(0.5) = 1 - 0.3 = 0.7$

$\varphi'(1.5) = 1 - 0.9 = 0.1$



Очевидно, что $|\varphi'(x)| \le 0.7 < 1$ - значит условия сходимости выполнены.

Выберем в качестве начального приближения 0.5

k	x	φ(x)	Δx
0	0,5	0,725	
1	0,725	0,867313	0,225
2	0,867313	0,941643	0,142313
3	0,941643	0,975636	0,07433
4	0,975636	0,990076	0,033993
5	0,990076	0,996001	0,01444
6	0,996001	0,998396	0,005925

Получено решение $x^* \cong 0.996001$