Лекция № 8

Часть II. Численные методы

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ - скалярная форма записи

или

$AX = B$ - векторная форма записи, где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - действительная матрица размерности ($n \times n$),

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец неизвестных размерности ($n \times 1$)

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots\dots\dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец правых частей СЛАУ размерности ($n \times 1$)

Требуется найти решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots\dots\dots\dots, x_n^*)^T \in R^n$, подстановка которого в СЛАУ обратит каждое уравнение которой в тождество : $AX^* \equiv B$

Аналитические (метод Крамера) и прямые методы (метод Гаусса и его модификации и др.) становятся трудно реализуемыми в случаях, когда СЛАУ имеет большую размерность ($n > 100$). Альтернативой этим методам являются численные методы, основанные на многократном уточнении $X^{(0)}$ - приближенно заданного решения задачи (2).

Метод простых итераций

Сущность метода:

1. Преобразовать СЛАУ к эквивалентной : $X = \alpha X + \beta$

где $\alpha = (\alpha_{ij})$ - квадратная матрица ($n \times n$)

$\beta = (\beta_i)$ - вектор столбец ($n \times 1$)

2. Задать начальное приближение $X^{(0)}$, как правило в качестве начального приближения выбирают $X^{(0)} = \beta$

3. Уточнять решение согласно рекуррентному соотношению:

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta, \qquad k = 0,1,2........$$

что соответствует

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^k + \alpha_{13}x_3^k + ... + \alpha_{1n}x_n^k \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^k + \alpha_{23}x_3^k + ... + \alpha_{2n}x_n^k \\ .... \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^k + \alpha_{n2}x_2^k + ... + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^k \end{cases}$$

4. Итерации прерываются при выполнении условия: $\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - достаточно малое число – точность счета.

Для изложенной последовательности действий необходимо выяснить:

- сходится ли процесс, т.е. имеет ли место $X^{(k)} \to X^*$ при $k \to \infty$;
- какова скорость сходимости, если процесс сходится;
- какова погрешность найденного решения, т.е. чему равна $\left\| X^{(k)} - X^* \right\|$ при выполнении условия $\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\| < \varepsilon$.

Теорема 1. (о необходимом и достаточном условии сходимости метода простых итераций)

Для сходимости алгоритма при любых $X^{(0)}$ и β необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы α были по модулю меньше 1.

Для выяснения вопроса сходимости на основании этой теоремы возникает необходимость вычисления собственных значений матрица, что представляет собой отдельную трудоемкую задачу.

Теорема 2. (о достаточном условии сходимости метода простых итераций)

Метод простых итераций, реализующийся на основании алгоритма (5), сходится к единственному решению системы при любом начальном приближении $X^{(0)}$ со скоростью не медленнее геометрической прогрессии, если какая-либо норма матрицы $\|\alpha\|$ меньше 1.

Замечания.

1. Условия теоремы предъявляют завышенные требования к матрице α, поэтому сходимость может быть даже при $\|\alpha\| \geq 1$.
2. Сходящийся процесс является *самоисправляющимся*, т.е. ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное.

3. *Условия сходимости выполняются, если в исходной матрице диагональные элементы преобладают,* т.е.

$$|a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \dots\dots + |a_{1n}|$$
$$|a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| + \dots\dots + |a_{2n}|$$
$$|a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| + \dots\dots + |a_{3n}|$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$|a_{nn}| \geq |a_{n1}| + |a_{n2}| + |a_{n3}| + \dots\dots + |a_{nn-1}|$$

и хотя бы для одного уравнения неравенство строгое.

4. Чем меньше $\|\alpha\|$, тем быстрее сходимость метода.

Алгоритм решения СЛАУ методом простых итераций

1. Привести систему $AX = B$ к виду, при котором диагональные элементы преобладают. Для этого:
   - Найти в каждом уравнении максимальный по модулю элемент, если при этом он по модулю больше, чем сумма модулей всех остальных, записать уравнение в новую систему, так, чтобы этот элемент был диагональным.
   - Из оставшихся уравнений составить линейно-независимые между собой комбинации, так чтобы все строки новой системы были заполнены и соблюдался принцип преобладания диагонального элемента. При этом необходимо, чтобы все уравнения исходной системы были использованы в новой.

2. Разрешить первое уравнение полученной системы относительно x_1, второе относительно - x_2 и т.д.
В результате получается эквивалентная система $X = \alpha X + \beta$, матрица α для которой имеет нулевые диагональные элементы, при этом $\|\alpha\| < 1$.

3. Задать начальное приближение $X^{(0)} = \beta$

4. Применять алгоритм (5), до тех пор пока $\max\limits_j \left| x_j^{k+1} - x_j^k \right| < \varepsilon$.

В этом случае критерий окончания может быть интерпретирован так: производить вычисления до тех пор, пока в двух последовательных итерациях разница между соответствующими парами неизвестных не станет по модулю меньше ε.

Метод Зейделя

Этот метод является модификацией метода простых итераций. Для эквивалентной системы (3) итерационный процесс записывается в виде:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^k + \alpha_{13}x_3^k + \dots\dots\dots + \alpha_{1n}x_n^k \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{k+1} + \alpha_{23}x_3^k + \dots\dots\dots + \alpha_{2n}x_n^k \\ x_3^{k+1} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{k+1} + \alpha_{32}x_2^{k+1} + \dots\dots\dots + \alpha_{3n}x_n^k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{k+1} + \alpha_{n2}x_2^{k+1} + \dots\dots\dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} \end{cases}$$

Замечания.
1. Для метода Зейделя справедливы все замечания, относящиеся к методу простых итераций.
2. Метод Зейделя обычно сходится быстрее, чем метод простой итерации

3. Метод Зейделя может сходиться, когда расходится процесс простой итерации (в случае когда не выполняется условие $\|\alpha\| < 1$), но иногда бывает наоборот.

Пример. Найти численное решение системы.

Дано: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

Решение.

1. Преобразуем систему к виду, когда диагональные элементы преобладают:

$$\begin{cases} \underline{\underline{5}}x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + \underline{\underline{4}}x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + \underline{\underline{4}}x_3 = 5 \end{cases}$$

2. Преобразуем систему к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

3. Зададим начальное приближение:

$$x_1^0 = 1$$

$$x_2^0 = \frac{5}{4}$$

$$x_3^0 = \frac{5}{4}$$

4. Найдем решение СЛАУ методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0.01$

Итерация 1

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 - \frac{1}{5}x_2^0 + \frac{1}{5}x_3^0 = 1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4} = 1 \\ x_2^1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x_1^0 + \frac{1}{4}x_3^0 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4} = 1.0625 \\ x_3^1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_1^0 - \frac{1}{2}x_2^0 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = 0.875 \end{cases}$$

$$\left|x_1^1 - x_1^0\right| = 0$$

$$\left|x_2^1 - x_2^0\right| = 0.1875 \qquad \|\Delta X\| = 0.375$$

$$\left|x_3^1 - x_3^0\right| = 0.375$$

Итерация 2

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 - \frac{1}{5}x_2^1 + \frac{1}{5}x_3^1 = 1 - \frac{1}{5}\cdot 1.0625 + \frac{1}{5}\cdot 0.875 = 0.9625 \\ x_2^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x_1^1 + \frac{1}{4}x_3^1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0.875 = 0.96875 \\ x_3^2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_1^1 - \frac{1}{2}x_2^1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1.0625 = 0.96875 \end{cases}$$

$$\left|x_1^1 - x_1^0\right| = 0.0375$$

$$\left|x_2^1 - x_2^0\right| = 0.09375$$

$$\left|x_3^1 - x_3^0\right| = 0.09375$$

$$\|\Delta X\| = 0.09375$$

Остальные итерации запишем в виде таблицы:

№ итерации	x_1	x_2	x_3	$\|\Delta X\|$
0	1	1.25	1.25	
1	1	1.0625	0.875	0.375
2	0.9625	0.96875	0.96875	0.09375
3	1	1.01094	1.00625	0.04219
4	0.99906	1.00156	0.99453	0.01172
5	0.99859	0.99910	0.99898	0.00445

Критерий окончания счета выполнен, получено решение: $x_1^* = 0.99859 \quad x_2^* = 0.9991 \quad x_3^* = 0.99898$

5. Найдем решение СЛАУ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0.01$

Итерация 1

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 - \frac{1}{5}x_2^0 + \frac{1}{5}x_3^0 = 1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4} = 1 \\ x_2^1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x_1^1 + \frac{1}{4}x_3^0 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4} = 1.0625 \\ x_3^1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_1^1 - \frac{1}{2}x_2^1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1.0625 = 0.96875 \end{cases}$$

$$\left|x_1^1 - x_1^0\right| = 0$$
$$\left|x_2^1 - x_2^0\right| = 0.1875$$
$$\left|x_3^1 - x_3^0\right| = 0.28125$$

$\|\Delta X\| = 0.28175$

Итерация 2

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 - \frac{1}{5}x_2^1 + \frac{1}{5}x_3^1 = 1 - \frac{1}{5}\cdot 1.0625 + \frac{1}{5}\cdot 0.96875 = 0.98125 \\ x_2^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\cdot 0.98125 + \frac{1}{4}\cdot 0.96875 = 1.00156 \\ x_3^2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\cdot 98125 - \frac{1}{2}\cdot 1.00156 = 0.99453 \end{cases}$$

$$\left|x_1^1 - x_1^0\right| = 0.01848$$
$$\left|x_2^1 - x_2^0\right| = 0.06094$$
$$\left|x_3^1 - x_3^0\right| = 0.02578$$

$\|\Delta X\| = 0.06094$

Остальные итерации запишем в виде таблицы:

№ итерации	x_1	x_2	x_3	$\|\Delta X\|$
0	1	1.25	1.25	
1	1	1.0625	0.96875	0.28125
2	0.98125	1.00156	0.99453	0.06094
3	0.99859	0.99934	0.99998	0.01734
4	1.00013	0.99993	1.00007	0.00154

Критерий окончания счета выполнен, получено решение:

$x_1^* = 1.00013 \quad x_2^* = 0.99993 \quad x_3^* = 1.00007$