

Лекция № 7

Пример 1

Дано:

$$f(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$-2x_1 + 6x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Решить задачу графически и симплекс методом.

Графическое решение задачи

1. Множество допустимых решений (МДР), определяемое ограничениями, выделено на чертеже штриховкой.

2. Градиент функции: $\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, на чертеже это вектор с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке $(2, 3)$.

3. Уравнение линии уровня функции:

$$f(X) = C$$

$$2x_1 + 3x_2 = C$$

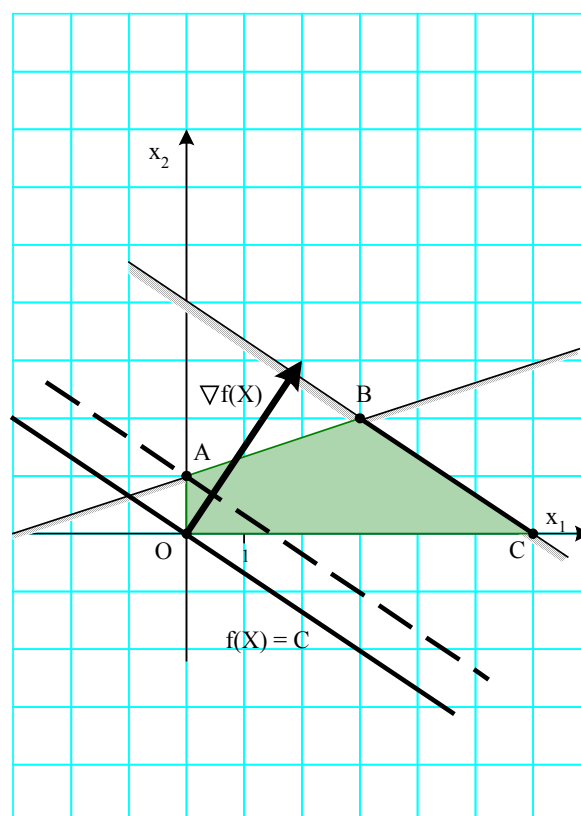
Уравнение линии уровня функции в точке $(0, 0)$:

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

На чертеже линия уровня функции – прямая перпендикулярная градиенту.

4. Для поиска максимума перемещаем линию уровня в направлении градиента до последнего касания с МДР, очевидно, что касание произойдет на отрезке $[B, C]$, следовательно задача имеет бесконечное множество решений на отрезке $[B, C]$

здесь $B = (3, 2)$, $C = (6, 0)$.



Решение задачи симплекс методом

Подготовка задачи к решению симплекс-методом

1. Выполнено (ищем максимум)

2. Выполнено (правые части ограничений неотрицательны)

3. Приведем задачу к каноническому виду, для этого введем в каждое ограничение неотрицательную переменную:

Замечание. Если ограничение имеет знак « \leq », то вводится переменная со знаком «+», если же ограничение имеет знак « \geq », то вводится переменная со знаком «-», если исходное ограничение имеет знак « $=$ », то дополнительные переменные не вводятся.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$-2x_1 + 6x_2 + x_4 = 6$$

$x_3, x_4 \geq 0$ - дополнительные переменные (дополняют неравенства до равенств)

4. Выпишем столбцы коэффициентов при переменных в ограничениях:

x_1	x_2	x_3	x_4
$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
		\uparrow	\uparrow

Среди столбцов имеется два столбца единичной матрицы размерности (2 x 2), они отмечены символом \uparrow , значит базис есть.

6. Начальное базисное решение:

x_3, x_4 - базисные переменные (переменные отмечены символом \uparrow), эти переменные равны правым частям ограничений, в которых они находятся:

$$x_3 = 12$$

$$x_4 = 6$$

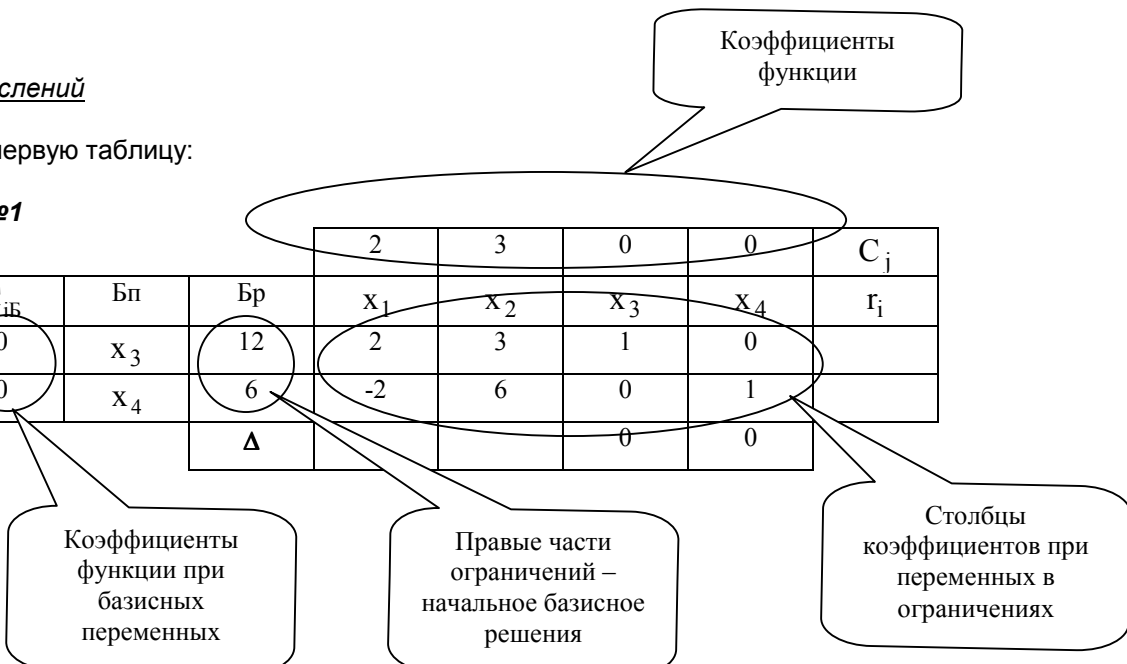
Остальные переменные $x_1 = x_2 = 0$

Этап вычислений

Заполним первую таблицу:

Таблица №1

			2	3	0	0	C_j
C_{iB}	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	Γ_i
0	x_3	12	2	3	1	0	
0	x_4	6	-2	6	0	1	
	Δ				0	0	



Базисное решение, соответствующее таблице №1:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 12 \quad x_4 = 6$$

Оно соответствует в исходных переменных точке $O = (0, 0)$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - (0 + 0) = 2$$

Кoeffициенты
функции при
переменной x_1

Столбец
коэффициентов C_{iB}

Столбец
коэффициентов при
переменной x_1

$$\Delta_2 = 3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 - (0 + 0) = 3$$

Для базисных переменных симплекс разности равны 0.

Таблица №1

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	12	2	3	1	0	
0	x_4	6	-2	6	0	1	
		Δ	2	3	0	0	

Z-столбец

Т.к. Δ_2 является максимальной положительной величиной в строке симплекс разностей, то в базис вводится переменная x_2 . Соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины r_i , как отношения элементов столбца Бр к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{12}{3} = 4 \quad r_2 = \frac{6}{6} = 1$$

Таблица №1

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	12	2	3	1	0	4
0	x_4	6	-2	6	0	1	1
		Δ	2	3	0	0	

Z-строка

Z-столбец

Кoeffициент
пересчета

Разрешающий
элемент

Из базиса выводится переменная x_4 , т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_2 , соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки находится разрешающий элемент $R = 6$.

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №2;
- запишем в новую таблицу №2 новые базисные переменные x_2 и x_3 ;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №2

Таблица №2

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3						
3	x_2						
		Δ					

- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем в таблицу №2 на своё место – получится **разрешающая строка**;

$$\begin{array}{r} \text{Z-строка} \\ \hline \text{Результат} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 6 & -2 & 6 & 0 & 1 & \\ 1 & -1/3 & 1 & 0 & 1/6 & \end{array} \right) / 6$$

Таблица №2

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3						
3	x_2	1	-1/3	1	0	1/6	
		Δ					

Разрешающая строка

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета - 1-й элемент Z-столбца из таблицы №1 – это число 3, и вычтем из 1-й строки таблицы №1, результат запишем в таблицу №2 на свое место:

$$\begin{array}{r} \text{Строка 1 таблицы №1} \\ \hline \text{Разрешающая строка} \cdot (3) \\ \hline \text{Результат} \end{array} \begin{array}{cccccc} 12 & 2 & 3 & 1 & 0 & \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 1/2 & \\ \hline 9 & 3 & 0 & 1 & -1/2 & \end{array}$$

Таблица №2

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	9	3	0	1	-1/2	
3	x_2	1	-1/3	1	0	1/6	
		Δ					

Базисное решение, соответствующее таблице №2:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = 0$$

Оно соответствует в исходных переменных точке $A = (0, 1)$

Далее выполняем проводим расчет по аналогии:

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 2 - (0 - 1) = 3$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix} = 0 - (0 + 1/2) = -1/2$$

Т.к. Δ_1 является максимальной положительной величиной в строке симплекс разностей, то в базис вводится переменная x_1 , соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины r_i , как отношения элементов столбца Бр к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{9}{3} = 3 \quad r_2 = \frac{1}{-1/3} = -3$$

Из базиса выводится переменная x_4 , т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_2 , соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки, находится разрешающий элемент $R = 3$.

Таблица №2

			2	3	0	0	C_j	
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i	
0	x_3	9	3	0	1	-1/2	3	Z-строка
3	x_2	1	-1/3	1	0	1/6	-3	
		Δ	3	0	0	-1/2		Z-столбец

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №3;
- запишем в новую таблицу №3 новые базисные переменные x_2 и x_1 ;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №3

Таблица №3

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
2	x_1						
3	x_2						
		Δ					

- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем в таблицу №3 на своё место – получится **разрешающая строка**;

$$\begin{array}{l} \text{Z-строка} \left(\begin{array}{cccccc} 9 & 3 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right) / 3 \\ \text{Результат} \quad \begin{array}{cccccc} 3 & 1 & 0 & 1/3 & -1/6 \end{array} \end{array}$$

Таблица №3

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
2	x_1	3	1	0	1/3	-1/6	
3	x_2						
		Δ					

Разрешающая строка

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета - 2-й элемент Z-столбца из таблицы №2 – это число $(-1/3)$, и вычтем из 2-й строки таблицы №2, результат запишем в таблицу №3 на свое место:

$$\begin{array}{r}
 \text{Строка 2 таблицы №2} \\
 \text{Разрешающая строка} \cdot (-1/3) \\
 \hline
 \text{Результат}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1 \quad -1/3 \quad 1 \quad 0 \quad 1/6 \\
 3 \quad 1 \quad 0 \quad 1/3 \quad -1/6 \\
 \hline
 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1/9 \quad 1/9
 \end{array}$$

Таблица №3

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
2	x_1	3	1	0	1/3	-1/6	
3	x_2	2	0	1	1/9	1/9	
		Δ	0	0	-1	0	

Базисное решение, соответствующее таблице №3:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0$$

Оно соответствует в исходных переменных точке $B = (3, 2)$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/9 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/9 \end{pmatrix} = 0$$

Т.к. в строке симплекс разностей Δ нет ни одной положительной величины, решение задачи найдено – это последнее базисное решение, соответствующее точке $B = (3, 2)$.

Анализ решения задачи табличным симплекс-методом

Строка симплекс-разностей последней симплекс-таблицы содержит три нуля, это больше чем число ограничений задачи, значит задача имеет бесконечное множество решений, одно из которых найдено.