Лекция № 7

Пример 1

Дано:

$$f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$-2x_1 + 6x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

Решить задачу графически и симплекс методом.

Графическое решение задачи

1. Множество допустимых решений (МДР), определяемое ограничениями, выделено на чертеже штриховкой.

2. Градиент функции: $\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, на чертеже это вектор с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке $(2, 3)$.

3. Уравнение линии уровня функции:

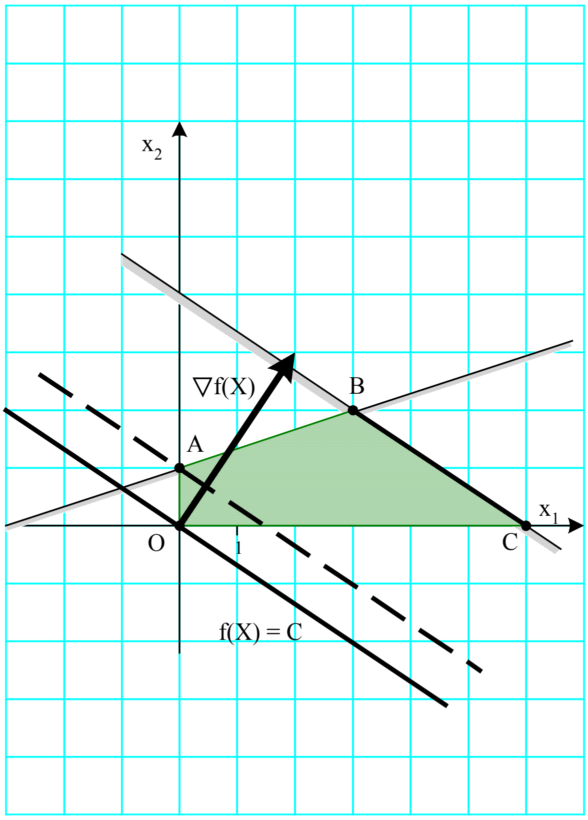
$$f(X) = C$$
$$2x_1 + 3x_2 = C$$

Уравнение линии уровня функции в точке $(0, 0)$:

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

На чертеже линия уровня функции – прямая перпендикулярная градиенту.

4. Для поиска максимума перемещаем линию уровня в направлении градиента до последнего касания с МДР, очевидно, что касание произойдет на отрезке $[B, C]$, следовательно задача имеет бесконечное множество решений на отрезке $[B, C]$ здесь $B = (3, 2)$, $C = (6, 0)$.



Решение задачи симплекс методом

Подготовка задачи к решению симплекс-методом

1. Выполнено (ищем максимум)

2. Выполнено (правые части ограничений неотрицательны)

3. Приведем задачу к каноническому виду, для этого введем в каждое ограничение неотрицательную переменную:

Замечание. Если ограничение имеет знак «$\le$», то вводится переменная со знаком «+», если же ограничение имеет знак «$\ge$», то вводится переменная со знаком «-», если исходное ограничение имеет знак «=», то дополнительные переменные не вводятся.

$$2x_1 + 3x_2 \underline{\underline{+ x_3}} = 12$$

$$-2x_1 + 6x_2 \underline{\underline{+ x_4}} = 6$$

$x_3, \quad x_4 \ge 0$ - дополнительные переменные (дополняют неравенства до равенств)

4. Выпишем столбцы коэффициентов при переменных в ограничениях:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & & \Uparrow & \Uparrow \end{array}$$

Среди столбцов имеется два столбца единичной матрицы размерности (2 x 2), они отмечены символом $\Uparrow$, значит базис есть.

6. Начальное базисное решение:

$x_3, \quad x_4$ - базисные переменные (переменные отмечены символом $\Uparrow$), эти переменные равны правым частям ограничений, в которых они находятся:

$x_3 = 12$

$x_4 = 6$

Остальные переменные $x_1 = x_2 = 0$

Этап вычислений

Заполним первую таблицу:

Коэффициенты функции

Таблица №1

			2	3	0	0	C_j
$C_{iБ}$	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	12	2	3	1	0	
0	x_4	6	-2	6	0	1	
		Δ			0	0	

Коэффициенты функции при базисных переменных

Правые части ограничений – начальное базисное решения

Столбцы коэффициентов при переменных в ограничениях

Базисное решение, соответствующее таблице №1:

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 12 \qquad x_4 = 6$

Оно соответствует в исходных переменных точке $O = (0, 0)$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - (0+0) = 2$$

Коэффициенты функции при переменной x_1

Столбец коэффициентов $C_{iБ}$

Столбец коэффициентов при переменной x_1

$$\Delta_2 = 3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 - (0+0) = 3$$

Для базисных переменных симплекс разности равны 0.

Таблица №1

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	12	2	3	1	0	
0	x_4	6	-2	6	0	1	
		Δ	2	3	0	0	

Z-столбец

Т.к. Δ_2 является максимальной положительной величиной в строке симплекс разностей, то в базис вводится переменная x_2. Соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины r_i, как отношения элементов столбца Бр к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{12}{3} = 4 \qquad r_2 = \frac{6}{6} = 1$$

Таблица №1

			2	3	0	0	C_j	
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i	
0	x_3	12	2	3	1	0	4	
0	x_4	6	-2	6	0	1	1	Z-строка
		Δ	2	3	0	0		

Z-столбец

Коэффициент пересчета

Разрешающий элемент

Из базиса выводится переменная x_4, т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_2, соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки находится разрешающий элемент $R = 6$.

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №2;
- запишем в новую таблицу №2 новые базисные переменные x_2 и x_3;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №2

Таблица №2

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3						
3	x_2						
		Δ					

- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем в таблицу №2 на своё место – получится **разрешающая строка**;

Z-строка (	6	-2	6	0	1	) / 6
Результат	1	$-1/3$	1	0	$1/6$	

Таблица №2

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3						
3	x_2	1	$-1/3$	1	0	$1/6$	
		Δ					

Разрешающая строка

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета - 1-й элемент Z-столбца из таблицы №1 – это число 3, и вычтем из 1-й строки таблицы №1, результат запишем в таблицу №2 на свое место:

Строка 1 таблицы №1 —	12	2	3	1	0
Разрешающая строка * (3)	3	-1	3	0	$1/2$
Результат	9	3	0	1	$-1/2$

Таблица №2

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	9	3	0	1	$-1/2$	
3	x_2	1	$-1/3$	1	0	$1/6$	
		Δ					

Базисное решение, соответствующее таблице №2:

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 9 \qquad x_4 = 0$

Оно соответствует в исходных переменных точке $A = (0, 1)$

Далее выполняем проводим расчет по аналогии:

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 2 - (0 - 1) = 3$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix} = 0 - (0 + 1/2) = -1/2$$

Т.к. Δ_1 является максимальной положительной величиной в строке симплекс разностей, то в базис вводится переменная x_1, соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины r_i, как отношения элементов столбца Бр к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{9}{3} = 3 \qquad r_2 = \frac{1}{-1/3} = -3$$

Из базиса выводится переменная x_4, т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_2, соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки, находится разрешающий элемент $R = 3$.

Таблица №2

			2	3	0	0	C_j	
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i	
0	x_3	9	3	0	1	$-1/2$	3	Z-строка
3	x_2	1	$-1/3$	1	0	$1/6$	-3	
		Δ	3	0	0	$-1/2$		
			Z-столбец					

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №3;
- запишем в новую таблицу №3 новые базисные переменные x_2 и x_1;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №3

Таблица №3

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
2	x_1						
3	x_2						
		Δ					

- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем в таблицу №3 на своё место – получится **разрешающая строка**;

Z-строка (	9	3	0	1	$-1/2$	) / 3
Результат	3	1	0	$1/3$	$-1/6$	

Таблица №3

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
2	x_1	3	1	0	1/3	−1/6	
3	x_2						
		Δ					

Разрешающая строка

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета - 2-й элемент Z-столбца из таблицы №2 – это число $(-1/3)$, и вычтем из 2-й строки таблицы №2, результат запишем в таблицу №3 на свое место:

Строка 2 таблицы №2	—	1	−1/3	1	0	1/6
Разрешающая строка * $(-1/3)$		3	1	0	1/3	−1/6
Результат		2	0	1	1/9	1/9

Таблица №3

			2	3	0	0	C_j
C_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
2	x_1	3	1	0	1/3	−1/6	
3	x_2	2	0	1	1/9	1/9	
		Δ	0	0	-1	0	

Базисное решение, соответствующее таблице №3:

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 0$

Оно соответствует в исходных переменных точке $B = (3, 2)$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/9 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/9 \end{pmatrix} = 0$$

Т.к. в строке симплекс разностей Δ нет ни одной положительной величины, решение задачи найдено – это последнее базисное решение, соответствующее точке $B = (3, 2)$.

Анализ решения задачи табличным симплекс-методом

Строка симплекс-разностей последней симплекс-таблицы содержит три нуля, это больше чем число ограничений задачи, значит задача имеет бесконечное множество решений, одно из которых найдено.