

Приложение: Построение типовых линий уровня квадратичной функции

Дано уравнение линии уровня: $a_1x_1^2 + a_3x_2^2 + a_4x_1 + a_5x_2 + a_6 = C$

Инвариант для определения конфигурации линии уровня: $D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix}$

Если $D > 0$ - линия уровня эллипс

Если $D < 0$ - линия уровня гипербола

Если $D = 0$ - линия уровня парабола

Построение эллипса

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{(x_1 - a)^2}{A} + \frac{(x_2 - b)^2}{B} = 1$, где $A > 0, B > 0$

Центр эллипса: точка с координатами (a, b)

Оси эллипса: $x_1 = a, x_2 = b$

Точки пересечения эллипса с главными осями:

$x_1 = a, \frac{(x_2 - b)^2}{B} = 1 \Rightarrow X_1^a, X_2^a$ - точки пересечения эллипса с осью $x_1 = a$

$x_2 = b, \frac{(x_1 - a)^2}{A} = 1 \Rightarrow X_1^b, X_2^b$ - точки пересечения эллипса с осью $x_2 = b$

Дополнительные точки для построения эллипса:

Или для нескольких значений x_2 , лежащих в диапазоне, задаваемом точками X_1^a, X_2^a ,

вычисляются значения x_1 по формуле: $x_1 = \pm \sqrt{\left(1 - \frac{(x_2 - b)^2}{B}\right) \cdot A} + a$

Или для нескольких значений x_1 , лежащих в диапазоне, задаваемом точками X_1^b, X_2^b ,

вычисляются значения x_2 по формуле: $x_2 = \pm \sqrt{\left(1 - \frac{(x_1 - a)^2}{A}\right) \cdot B} + b$

Построение гиперболы

Каноническое уравнение гиперболы: (1) $\frac{(x_1 - a)^2}{A} - \frac{(x_2 - b)^2}{B} = 1$, где $A > 0, B > 0$

или

(2) $-\frac{(x_1 - a)^2}{A} + \frac{(x_2 - b)^2}{B} = 1$, где $A > 0, B > 0$

Случай (1)

Ось гиперболы: $x_2 = b$

Точки пересечения гиперболы с осью:

$x_2 = b, \frac{(x_1 - a)^2}{A} = 1 \Rightarrow X_1^b, X_2^b$ - точки пересечения гиперболы с осью $x_2 = b$

Дополнительные точки для построения гиперболы:

Для нескольких значений x_1 , лежащих вне диапазона, задаваемого точками X_1^b, X_2^b , вычисляются значения x_2 по формуле: $x_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{(x_1 - a)^2}{A} - 1\right)} \cdot B + b$

Случай (2)

Ось гиперболы: $x_1 = a$

Точки пересечения гиперболы с осью:

$x_1 = a, \frac{(x_2 - b)^2}{B} = 1 \Rightarrow X_1^a, X_2^a$ - точки пересечения гиперболы с осью $x_1 = a$

Дополнительные точки для построения гиперболы:

Для нескольких значений x_2 , лежащих вне диапазона, задаваемого точками X_1^a, X_2^a , вычисляются значения x_1 по формуле: $x_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{(x_2 - b)^2}{B} - 1\right)} \cdot A + a$

Построение параболы

Каноническое уравнение параболы: (1) $x_2 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$

или

(2) $x_1 = Ax_2^2 + Bx_2 + C$

Случай (1)

Вершина параболы: $x_1^* = \frac{-B}{2A}, x_2^* = Ax_1^{*2} + Bx_1^* + C$

Ось параболы: $x_1 = x_1^*$

Ветви параболы: если $A > 0$ - вдоль положительного направления оси x_2
если $A < 0$ - вдоль отрицательного направления оси x_2

Дополнительные точки для построения параболы:

Для нескольких значений x_1 , лежащих справа и слева от вершины вычисляются значения x_2 по формуле: $x_2 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$

Случай (2)

Вершина параболы: $x_2^* = \frac{-B}{2A}, x_1^* = Ax_2^{*2} + Bx_2^* + C$

Ось параболы: $x_2 = x_2^*$

Ветви параболы: если $A > 0$ - вдоль положительного направления оси x_1
если $A < 0$ - вдоль отрицательного направления оси x_1

Дополнительные точки для построения параболы:

Для нескольких значений x_2 , лежащих справа и слева от вершины вычисляются значения x_1 по формуле: $x_1 = Ax_2^2 + Bx_2 + C$