

Образец выполнения этапа #5

Расчетно-графическая работа по курсу Дифференциальные уравнения
Выполнил студент группы 17-201
Иванов И.И.
Вариант №1

Этап #5 **Внимание ! Тригонометрические функции вычисляются в радианах !**

Задание:

Вариант №1	Этап #5
$y' + y \cdot \operatorname{tg}(x) = \cos(x) \quad y(0) = 2$	<p>Задание.</p> <ol style="list-style-type: none">1. Решить задачу Коши для ДУ 1-го порядка аналитически.2. Решить задачу Коши для ДУ 1-го порядка численно методом Эйлера на отрезке длиной 1. Число разбиений отрезка $n = 1, 2, 4, 5$. Ответ оформить в виде таблицы.3. Построить график аналитического решения и все ломанные Эйлера на одном чертеже.

Часть 1.

Дано: $y' + y \cdot \operatorname{tg}(x) = \cos(x) \quad y(0) = 2$

Решить задачу Коши для ДУ 1-го порядка аналитически.

Решение:

Определим тип исходного ДУ:

$$y' = \underbrace{-\operatorname{tg}(x)}_{a(x)} \cdot y + \underbrace{\cos(x)}_{b(x)} \text{ - это ЛДУ 1-го порядка}$$

Решаем соответствующее однородное ДУ:

$$y' = -\operatorname{tg}(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg}(x) dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\operatorname{tg}(x) dx$$

$$\ln|y| = \ln|\cos(x)| + \ln C$$

$$y = C \cdot \cos(x)$$

В полученном решении заменяем произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$$y = C(x) \cdot \cos(x)$$

Подставляем полученное решение в ЛДУ:

Образец выполнения этапа #5

$$\begin{aligned}(C(x) \cdot \cos(x))' &= -\operatorname{tg}(x) \cdot C(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \\ C'(x) \cdot \cos(x) - C(x) \cdot \sin(x) &= -\operatorname{tg}(x) \cdot C(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \\ C'(x) \cdot \cos(x) - C(x) \cdot \sin(x) &= -\sin(x) \cdot C(x) + \cos(x) \\ C'(x) \cdot \cos(x) &= \cos(x) \\ C'(x) &= 1\end{aligned}$$

Находим неизвестную функцию:

$$C'(x) = \int 1 \cdot dx = x + \hat{C}$$

Подставляем найденное выражение в решение:

$$y = (x + C) \cdot \cos(x)$$

Проверяем потерянные решения:

$$\begin{aligned}y = 0 &\quad - \text{не решение (не обращаем ДУ в тождество)} \\ \cos(x) = 0 &\quad - \text{не решение (противоречит условию)}\end{aligned}$$

Решаем задачу Коши:

$$y(0) = 2 \rightarrow 2 = (0 + C) \cdot \cos(0) \rightarrow C = 2$$

Окончательно: $y = (x + 2) \cdot \cos(x)$ - решение задачи Коши

Ответ: $y = (x + 2) \cdot \cos(x)$

Точки для построения графика аналитического решения на отрезке длиной единица с началом в заданной начальной точке $x_0 = 0$

x	y
0	2
0.1	2.0895
0.2	2.1561
0.3	2.1973
0.4	2.2105
0.5	2.1940
0.6	2.1459
0.7	2.0651
0.8	1.9508
0.9	1.8027
1	1.6209

Часть 2.

Дано: $y' + y \cdot \operatorname{tg}(x) = \cos(x)$ $y(0) = 2$

Решить задачу Коши для ДУ 1-го порядка численно методом Эйлера на отрезке длиной 1.
Число разбиений отрезка $n = 1, 2, 4, 5$

Решение:

Перепишем задачу: $y' = \underbrace{-\operatorname{tg}(x) \cdot y + \cos(x)}_{f(x,y)}$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

Т.к. начальная точка в поставленной задаче $x_0 = 0$, будем искать решение задачи Коши на отрезке $[0, 1]$.

Пусть число разбиений отрезка $n = 1$, тогда шаг для вычислений $h = \frac{1}{1} = 1$.

Итерация 0 (нач. точка)

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$f(x_0, y_0) = -\operatorname{tg}(0) \cdot 2 + \cos(0) = 1$$

Итерация 1 (i = 0)

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 1 \cdot 1 = 3$$

Пусть число разбиений отрезка $n = 2$, тогда шаг для вычислений $h = \frac{1}{2} = 0.5$.

Итерация 0 (нач. точка)

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$f(x_0, y_0) = -\operatorname{tg}(0) \cdot 2 + \cos(0) = 1$$

Итерация 1 (i = 0)

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 0.5 \cdot 1 = 2.5$$

$$f(x_1, y_1) = -\operatorname{tg}(0.5) \cdot 2.5 + \cos(0.5) = -0.1743$$

Итерация 2 (i = 1)

$$x_2 = x_1 + h = 0.5 + 0.5 = 1$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2.5 + 0.5 \cdot (-0.1743) = 2.4129$$

Образец выполнения этапа #5

Пусть число разбиений отрезка $n = 4$, тогда шаг для вычислений $h = \frac{1}{4} = 0.25$.

Итерация 0 (нач. точка)

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$f(x_0, y_0) = -\operatorname{tg}(0) \cdot 2 + \cos(0) = 1$$

Итерация 1 (i = 0)

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 0.25 \cdot 1 = 2.25$$

$$f(x_1, y_1) = -\operatorname{tg}(0.25) \cdot 2.25 + \cos(0.25) = 0.4296$$

Итерация 2 (i = 1)

$$x_2 = x_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2.25 + 0.25 \cdot (0.4296) = 2.3574$$

$$f(x_2, y_2) = -\operatorname{tg}(0.5) \cdot 2.3574 + \cos(0.5) = -0.1143$$

Итерация 3 (i = 2)

$$x_3 = x_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 2.3574 + 0.25 \cdot (-0.1143) = 2.3288$$

$$f(x_3, y_3) = -\operatorname{tg}(0.75) \cdot 2.3288 + \cos(0.75) = -0.4298$$

Итерация 4 (i = 3)

$$x_4 = x_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 2.3288 + 0.25 \cdot (-0.4298) = 2.2214$$

Пусть число разбиений отрезка $n = 5$, тогда шаг для вычислений $h = \frac{1}{5} = 0.2$.

Итерация 0 (нач. точка)

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$f(x_0, y_0) = -\operatorname{tg}(0) \cdot 2 + \cos(0) = 1$$

Итерация 1 (i = 0)

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 0.2 \cdot 1 = 2.2$$

$$f(x_1, y_1) = -\operatorname{tg}(0.2) \cdot 2.2 + \cos(0.2) = 0.5517$$

Итерация 2 (i = 1)

$$x_2 = x_1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2.2 + 0.2 \cdot (0.5517) = 2.3103$$

$$f(x_2, y_2) = -\operatorname{tg}(0.4) \cdot 2.3103 + \cos(0.4) = 0.0924$$

Итерация 3 (i = 2)

$$x_3 = x_2 + h = 0.4 + 0.2 = 0.6$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 2.3103 + 0.2 \cdot (0.0924) = 2.3288$$

Образец выполнения этапа #5

$$f(x_3, y_3) = -\operatorname{tg}(0.6) \cdot 2.3288 + \cos(0.6) = -0.2599$$

Итерация 4 (i = 3)

$$x_4 = x_3 + h = 0.6 + 0.2 = 0.8$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 2.3288 + 0.2 \cdot (-0.2599) = 2.2768$$

$$f(x_4, y_4) = -\operatorname{tg}(0.8) \cdot 2.2768 + \cos(0.8) = -0.4412$$

Итерация 5 (i = 4)

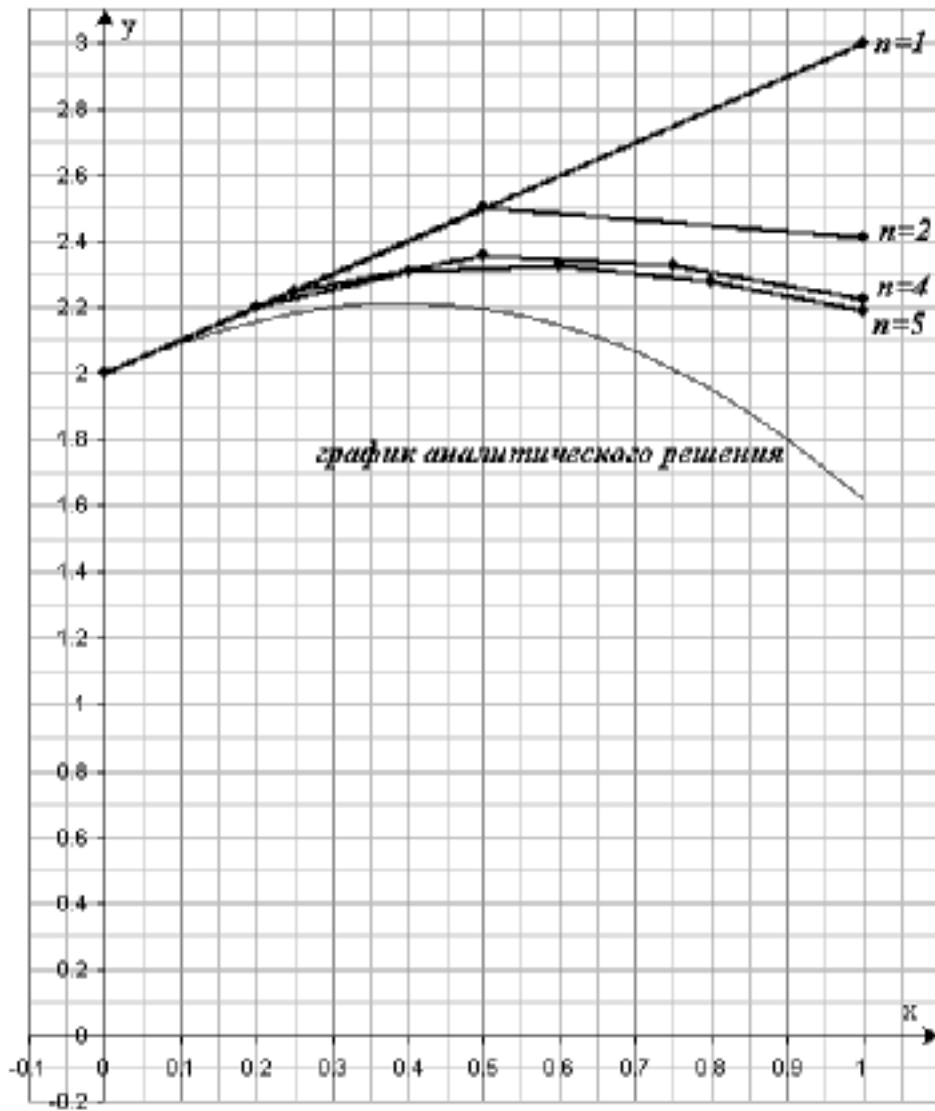
$$x_5 = x_4 + h = 0.8 + 0.2 = 1$$

$$y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 2.2768 + 0.2 \cdot (-0.4412) = 2.1886$$

Ответ:

Число разбиений, шаг	Итерации	x	y
n = 1 h = 1	0	0	2
	1	1	3
n = 2 h = 0.5	0	0	2
	1	0.5	2.5
	2	1	2.4125
n = 4 h = 0.25	0	0	2
	1	0.25	2.25
	2	0.5	2.3574
	3	0.75	2.3288
	4	1	2.2214
n = 5 h = 0.2	0	0	2
	1	0.2	2.2
	2	0.4	2.3103
	3	0.6	2.3288
	4	0.8	2.2768
	5	1	2.1886

Часть 3.



Графики аналитического и численного решения задачи Коши на отрезке $[0, 1]$