Расчетно-графическая работа по курсу Дифференциальные уравнения
Выполнил студент группы 17-201
Иванов И.И.
Вариант №1

Этап #4

Задание:

Вариант №1	***Этап #4***
$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$	**<u>Задание</u>**. Решить систему линейных однородных ДУ (СЛОДУ) методом Эйлера.

<u>Дано:</u> $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$

Решить систему линейных однородных ДУ (СЛОДУ) методом Эйлера.

<u>Решение:</u>

Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

> **Замечание.**
> В первую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x, а затем y из первого уравнения системы.
> Во вторую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x, а затем y из второго уравнения системы.

Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 3\cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы , решив уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16$$

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} = 5$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, действительные.

Запишем матрицу $A - \lambda_1 E$, где $\lambda_1 = 1$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ 1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_1 из уравнения:

$$(A - \lambda_1 E) \cdot V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:
Пусть $v_2 = 1$, тогда из первого уравнения системы $v_1 = -3v_2 = -3$.
Окончательно:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу $A - \lambda_2 E$, где $\lambda_2 = 5$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 1 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A - \lambda_2 E) \cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:
Пусть $v_2 = 1$, тогда из второго уравнения системы $v_1 = v_2 = 1$.
Окончательно:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Запишем решение системы в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5 \cdot t}$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

<u>Проверка:</u>

Из решения: $\dot{x} = -3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$ и $\dot{y} = C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$

Подставим выражения для x, y, $\dot{x}$ в первое уравнение исходной системы:

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = 2(-3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t}) + 3(C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t})$$

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = -6C_1 \cdot e^t + 2C_2 \cdot e^{5t} + 3C_1 \cdot e^t + 3C_2 \cdot e^{5t}$$

$$\underline{-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} \equiv -3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}}$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x, y, $\dot{y}$ во второе уравнение исходной системы:

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = (-3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t}) + 4(C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t})$$

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} + 4C_1 \cdot e^t + 4C_2 \cdot e^{5t}$$

$$\underline{C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} \equiv C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}}$$

получено верное тождество

Ответ:

$$\boxed{\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{5 \cdot t} \\ y = C_1 \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{5 \cdot t} \end{cases}}$$