Расчетно-графическая работа по курсу Дифференциальные уравнения
Выполнил студент группы 17-201
Иванов И.И.
Вариант №1

Этап #3

Задание:

Вариант №1	***Этап #3***
1. $y'' + 4y = \cos(2x) + 4x^2 - 3x \cdot \sin(2x)$ 2. $y'' + 4y = 4x^2 - x$ 3. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos(2x)}$	**<u>Задание</u>**. 1. Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения (коэффициенты частного решения не определять). 2. Решить ЛНДУ методом подбора частного решения. 3. Решить ЛНДУ методом вариации произвольгых постоянных.

Часть1.

<u>Дано:</u> $y'' + 4y = \cos(2x) + 4x^2 - 3x \cdot \sin(2x)$
Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения.
<u>Решение:</u>

Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$
$$\lambda^2 + 4 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$
$$y_{одн} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$\cos(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 0$
2 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$
3 слагаемое:	$-3x \cdot \sin(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$

Группируем слагаемые с одинаковыми парметрами α и β:

1 и 3 слагаемое:	$\cos(2x)$ $-3x \cdot \sin(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$	1 группа
2 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$	2 группа

Для каждой группы слагаемых записываем частное решение:

Первое частное решение: $\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$

$$y_{част1} = x^S \cdot \left[(b_0 + b_1 x)\cdot\cos(2x) + (b_2 + b_3 x)\cdot\sin(2x)\right]\cdot e^{0\cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i\cdot 2 = 2i \quad \to \quad S = 1$$

Окончательно: $\boxed{y_{част1} = x\cdot\left[(b_0 + b_1 x)\cdot\cos(2x) + (b_2 + b_3 x)\cdot\sin(2x)\right]}$

Второе частное решение: $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$

$$y_{част2} = x^S \cdot (b_4 + b_5 x + b_6 x^2)\cdot e^{0\cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i\cdot 0 = 0 \quad \to \quad S = 0$$

Окончательно: $\boxed{y_{част2} = b_4 + b_5 x + b_6 x^2}$

Записываем структуру общего решения ЛНДУ:

$$y = y_{одн} + y_{част1} + y_{част2}$$

Ответ:

$$\boxed{y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + x\cdot\left[(b_0 + b_1 x)\cdot\cos(2x) + (b_2 + b_3 x)\cdot\sin(2x)\right] + b_4 + b_5 x + b_6 x^2}$$

Часть 2.

Дано: $y'' + 4y = 4x^2 - x$

Решить ЛНДУ методом подбора частного решения.

Решение:

Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{одн} = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$$

Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$
2 слагаемое:	$-x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$

Группируем слагаемые с одинаковыми парметрами α и β:

1 и 2 слагаемое:	$4x^2$ $-x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$	1 группа

Для полученной группы слагаемых записываем частное решение:

Частное решение: $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$

$$y_{\text{част}} = x^S \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \quad \to \quad S = 0$$

Окончательно: $\boxed{y_{\text{част}} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$

Находим неизвестные коэффициенты частного решения методом неопределенных коэффициентов:

$$y_{\text{част}} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$y'_{\text{част}} = b_1 + 2 \cdot b_2 x$$

$$y''_{\text{част}} = 2 \cdot b_2$$

$$y''_{\text{част}} + 4y_{\text{част}} = 4x^2 - x$$

$$2 \cdot b_2 + 4 \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = 4x^2 - x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения:

x^0	$2 \cdot b_2 + 4 \cdot b_0 = 0$
x	$4 \cdot b_1 = -1$
x^2	$4 \cdot b_2 = 4$

Из полученной системы находим:

$$b_0 = -1/2$$

$$b_1 = -1/4$$

$$b_2 = 1$$

Окончательно: $\boxed{y_{\text{част}} = -1/2 - 1/4\, x + x^2}$

Проверка:

$$y_{\text{част}} = -1/2 - 1/4\, x + x^2$$

$$y'_{\text{част}} = -1/4 + 2 \cdot x$$

$$y''_{\text{част}} = 2$$

$$y''_{\text{част}} + 4y_{\text{част}} = 4x^2 - x$$

$$2 + 4 \cdot (-1/2 - 1/4\, x + x^2) = 4x^2 - x$$

$$2 - 2 - x + 4x^2 = 4x^2 - x$$

$$\underline{4x^2 - x \equiv 4x^2 - x}$$

Записываем решение ЛНДУ:

$y = y_{одн} + y_{част1}$

Ответ:

$$\boxed{y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x + x^2}$$

Часть 3.

<u>Дано:</u> $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos(2x)}$

Решить ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных.

<u>Решение:</u>

Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{одн} = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$$

В полученном решении заменяем произвольные постоянные на неизвестные функции.

$$y = C_1(x)\cos(2x) + C_2(x)\sin(2x)$$

Составляем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos(2x) + C_2'(x)\sin(2x) = 0 \\ -2\cdot C_1'(x)\sin(2x) + 2\cdot C_2'(x)\cos(2x) = \dfrac{1}{\cos(2x)} \end{cases}$$

Решаем полученную систему:

$$C_2' = \frac{1}{2}$$

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{tg}(2x)$$

Находим неизвестные функции:

$$C_2' = \int \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2} + \hat{C}_2$$

$$C_1'(x) = \int -\frac{1}{2}\mathrm{tg}(2x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\cos(2x)\right| + \hat{C}_1$$

Подставляем найденные выражения в решение:

$$y = \left(\frac{1}{4}\ln\left|\cos(2x)\right| + C_1\right)\cdot\cos(2x) + \left(\frac{x}{2} + C_2\right)\cdot\sin(2x) =$$

$$= C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{4}\ln\left|\cos(2x)\right|\cdot\cos(2x) + \frac{x}{2}\cdot\sin(2x)$$

Ответ:

$$\boxed{y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{4}\ln\left|\cos(2x)\right|\cdot\cos(2x) + \frac{x}{2}\cdot\sin(2x)}$$