Расчетно-графическая работа по курсу Дифференциальные уравнения
Выполнил студент группы 17-201
Иванов И.И.
Вариант №1

Этап #2

Задание:

Вариант №1	***Этап #2***
1. а) $(x^2+1)y''=2x\cdot y'$ б) $x\cdot y\cdot y''-x\cdot(y')^2=y\cdot y'$ 2. $y^{IV}=y'''$ 3. $y'''=\sin x \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2, \quad y''(0)=3$	**Задание**. 1. Понизить порядок ДУ до первого. Определить тип получившегося ДУ 1-го порядка. 2. Решить ДУ 4-го порядка. 3. Решить задачу Коши для ДУ 3-го порядка.

Часть1.

Уравнение а)

Дано: $(x^2+1)y''=2x\cdot y'$
Понизить порядок ДУ до первого. Определить тип получившегося ДУ 1-го порядка.
Решение:

Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, не содержащим y.
Используем замены: $\boxed{y'=z(x)}$, тогда $\boxed{y''=z'}$.
Получим: $\underline{(x^2+1)z'=2x\cdot z}$ - ДУ 1-го порядка.

Полученное ДУ 1-го порядка является ДУ с разделяющимися переменными:

$$z'=\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\varphi(x)}\cdot\underbrace{z}_{\psi(z)}$$

Уравнение б)

Дано: $x\cdot y\cdot y''-x\cdot(y')^2=y\cdot y'$
Понизить порядок ДУ до первого. Определить тип получившегося ДУ 1-го порядка.
Решение:

Данное ДУ является ДУ 2-го порядка содержит x и y.
Проверяем на однородность: $x\cdot(ky)\cdot(ky'')-x\cdot(ky')^2=ky\cdot ky'$ - каждое слагаемое в ДУ содержит k^2, сократив на которое ($k\neq 0$), получим исходное ДУ.

Используем замены: $\boxed{y' = z(x)\cdot y}$, тогда $\boxed{y'' = z'\cdot y + z^2\cdot y}$

Получим:

$$x\cdot y\cdot(z'\cdot y + z^2\cdot y) - x\cdot(z\cdot y)^2 = y\cdot z\cdot y$$

$$x\cdot z'\cdot y^2 + x\cdot z^2\cdot y^2 - x\cdot z^2\cdot y^2 = y^2\cdot z$$

$$x\cdot z' + x\cdot z^2 - x\cdot z^2 = z$$

$x\cdot z' = z$ - ДУ 1-го порядка

Полученное ДУ 1-го порядка является ДУ с разделяющимися переменными:

$$z' = \frac{1}{\underbrace{x}_{\varphi(x)}}\cdot\underbrace{z}_{\psi(z)}$$

Часть 2.

<u>Дано:</u> $y^{IV} = y'''$

Решить ДУ 4-го порядка.

<u>Решение:</u>

Данное ДУ является ДУ 4-го порядка, не содержащим y.

Используем замены: $\boxed{y''' = z(x)}$, тогда $\boxed{y^{IV} = z'}$.

Получим: $\underline{z' = z}$ - ДУ 1-го порядка.

Полученное ДУ 1-го порядка является ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = z$$

$$\int\frac{dz}{z} = \int dx$$

$$\ln|z| = x + \ln C_1$$

$\underline{z = C_1\cdot e^x}$ - решение ДУ 1-го порядка

Делаем обратную замену: $y''' = C_1\cdot e^x$ - получено ДУ 3-го порядка.

$y''' = C_1\cdot e^x$ это ДУ вида $y^{(n)} = f(x)$, решаем ДУ с помощью 3-х кратного интегрирования левой и правой частей ДУ:

$$\int y'''dx = \int C_1e^xdx \quad\to\quad y'' = C_1e^x + C_2$$

$$\int y''dx = \int(C_1e^x + C_2)dx \quad\to\quad y' = C_1e^x + C_2x + C_3$$

$$\int y'dx = \int(C_1e^x + C_2x + C_3)dx \quad\to\quad y = C_1e^x + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$$

Ответ: $\boxed{y = C_1e^x + C_2\dfrac{x^2}{2} + C_3x + C_4}$

Часть 3.

Дано: $y''' = \sin x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3$

Решить задачу Коши для ДУ 3-го порядка.

Решение:

Это ДУ имеет вид: $y^{(n)} = f(x)$.

В этом случае решение находится в результате 3-х кратного интегрирования левой и правой частей ДУ.

$$y''' = \sin x$$
$$\int y'''dx = \int \sin x dx \quad \to \quad y'' = -\cos x + C_1$$
$$\int y''dx = \int(-\cos x + C_1)dx \quad \to \quad y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$
$$\int y'dx = \int(-\sin x + C_1 x + C_2)dx \quad \to \quad y = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Получено общее решение ДУ: $\underline{y = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3}$

Дифференцируем общее решение два раза:

$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$
$$y'' = -\cos x + C_1$$

Записываем вместе общее решение и найденные производные:

$$y = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$
$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$
$$y'' = -\cos x + C_1$$

Подставляем заданные начальные условия в выписанные функции:

Условие $y(0) = 1$ означает, что при $x = 0$ функция $y = 1$: $1 = \cos(0) + C_1\frac{0^2}{2} + C_2 \cdot 0 + C_3$

Условие $y'(0) = 2$ означает, что при $x = 0$ функция $y' = 2$: $2 = -\sin(0) + C_1 \cdot 0 + C_2$

Условие $y''(0) = 3$ означает, что при $x = 0$ функция $y'' = 3$: $3 = -\cos(0) + C_1$

Получили: $\begin{cases} 1 = 1 + C_3 \\ 2 = C_2 \\ 3 = -1 + C_1 \end{cases}$

Решаем систему: $\begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = 0 \end{cases}$

Подставим найденные значения в общее решение: $\underline{y = \cos x + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot x + 0}$ - решение задачи Коши.

Ответ: $\boxed{y = \cos x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x}$