

## Образец выполнения этапа #2

Расчетно-графическая работа по курсу Дифференциальные уравнения  
Выполнил студент группы 17-201  
Иванов И.И.  
**Вариант №1**

### Этап #2

#### Задание:

<b>Вариант №1</b>	<b>Этап #2</b>
1. а) $(x^2 + 1)y'' = 2x \cdot y'$ б) $x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 = y \cdot y'$ 2. $y^{IV} = y'''$ 3. $y''' = \sin x$ $y(0) = 1$ , $y'(0) = 2$ , $y''(0) = 3$	<b>Задание.</b> 1. Понизить порядок ДУ до первого. Определить тип получившегося ДУ 1-го порядка. 2. Решить ДУ 4-го порядка. 3. Решить задачу Коши для ДУ 3-го порядка.

#### Часть 1.

##### Уравнение а)

Дано:  $(x^2 + 1)y'' = 2x \cdot y'$

Понизить порядок ДУ до первого. Определить тип получившегося ДУ 1-го порядка.

Решение:

Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, не содержащим  $y$ .

Используем замены:  $y' = z(x)$ , тогда  $y'' = z'$ .

Получим:  $(x^2 + 1)z' = 2x \cdot z$  - ДУ 1-го порядка.

Полученное ДУ 1-го порядка является ДУ с разделяющимися переменными:

$$z' = \underbrace{\frac{2x}{x^2 + 1}}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{z}_{\psi(z)}$$

##### Уравнение б)

Дано:  $x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 = y \cdot y'$

Понизить порядок ДУ до первого. Определить тип получившегося ДУ 1-го порядка.

Решение:

Данное ДУ является ДУ 2-го порядка содержит  $x$  и  $y$ .

Проверяем на однородность:  $x \cdot (ky) \cdot (ky'') - x \cdot (ky')^2 = ky \cdot ky'$  - каждое слагаемое в ДУ содержит  $k^2$ , сократив на которое ( $k \neq 0$ ), получим исходное ДУ.

## Образец выполнения этапа #2

Используем замены:  $y' = z(x) \cdot y$ , тогда  $y'' = z' \cdot y + z^2 \cdot y$

Получим:

$$x \cdot y \cdot (z' \cdot y + z^2 \cdot y) - x \cdot (z \cdot y)^2 = y \cdot z \cdot y$$

$$x \cdot z' \cdot y^2 + x \cdot z^2 \cdot y^2 - x \cdot z^2 \cdot y^2 = y^2 \cdot z$$

$$x \cdot z' + x \cdot z^2 - x \cdot z^2 = z$$

$$x \cdot z' = z - \text{ДУ 1-го порядка}$$

Полученное ДУ 1-го порядка является ДУ с разделяющимися переменными:

$$z' = \frac{1}{\underbrace{x}_{\varphi(x)}} \cdot \underbrace{z}_{\psi(z)}$$

### Часть 2.

Дано:  $y^{IV} = y'''$

Решить ДУ 4-го порядка.

Решение:

Данное ДУ является ДУ 4-го порядка, не содержащим  $y$ .

Используем замены:  $y''' = z(x)$ , тогда  $y^{IV} = z'$ .

Получим:  $z' = z$  - ДУ 1-го порядка.

Полученное ДУ 1-го порядка является ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = z$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int dx$$

$$\ln|z| = x + \ln C_1$$

$$\underline{z = C_1 \cdot e^x} - \text{решение ДУ 1-го порядка}$$

Делаем обратную замену:  $y''' = C_1 \cdot e^x$  - получено ДУ 3-го порядка.

$y''' = C_1 \cdot e^x$  это ДУ вида  $y^{(n)} = f(x)$ , решаем ДУ с помощью 3-х кратного интегрирования левой и правой частей ДУ:

$$\int y''' dx = \int C_1 e^x dx \rightarrow y'' = C_1 e^x + C_2$$

$$\int y'' dx = \int (C_1 e^x + C_2) dx \rightarrow y' = C_1 e^x + C_2 x + C_3$$

$$\int y' dx = \int (C_1 e^x + C_2 x + C_3) dx \rightarrow y = C_1 e^x + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Ответ:  $y = C_1 e^x + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$

**Часть 3.**

Дано:  $y''' = \sin x$   $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 3$

Решить задачу Коши для ДУ 3-го порядка.

Решение:

Это ДУ имеет вид:  $y^{(n)} = f(x)$ .

В этом случае решение находится в результате 3-х кратного интегрирования левой и правой частей ДУ.

$$y''' = \sin x$$

$$\int y''' dx = \int \sin x dx \rightarrow y'' = -\cos x + C_1$$

$$\int y'' dx = \int (-\cos x + C_1) dx \rightarrow y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$\int y' dx = \int (-\sin x + C_1 x + C_2) dx \rightarrow y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Получено общее решение ДУ:  $y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

Дифференцируем общее решение два раза:

$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$y'' = -\cos x + C_1$$

Записываем вместе общее решение и найденные производные:

$$y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$y'' = -\cos x + C_1$$

Подставляем заданные начальные условия в выписанные функции:

Условие  $y(0) = 1$  означает, что при  $x = 0$  функция  $y = 1$ :  $1 = \cos(0) + C_1 \frac{0^2}{2} + C_2 \cdot 0 + C_3$

Условие  $y'(0) = 2$  означает, что при  $x = 0$  функция  $y' = 2$ :  $2 = -\sin(0) + C_1 \cdot 0 + C_2$

Условие  $y''(0) = 3$  означает, что при  $x = 0$  функция  $y'' = 3$ :  $3 = -\cos(0) + C_1$

Получили: 
$$\begin{cases} 1 = 1 + C_3 \\ 2 = C_2 \\ 3 = -1 + C_1 \end{cases}$$

Решаем систему: 
$$\begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

**Образец выполнения этапа #2**

Подставим найденные значения в общее решение:  $y = \cos x + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot x + 0$  - решение задачи Коши.

Ответ:  $y = \cos x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x$