Расчетно-графическая работа по курсу Дифференциальные уравнения
Выполнил студент группы 17-201
Иванов И.И.
Вариант №1

Этап #1

Задание:

Вариант №1	***Этап #1***
а) $2y' + y \cdot tg(x) = \dfrac{\cos(x)}{y}$ б) $(2y \cdot \cos(x) + x^2)dy = (y^2 \cdot \sin(x) - 2x \cdot y)dx$	**Задание**. Определить тип (с доказательством) и найти общее решение каждого ДУ 1-го порядка

Уравнение а)

Дано: $2y' + y \cdot tg(x) = \dfrac{\cos(x)}{y}$

Определить тип и найти общее решение ДУ.

Решение:

Определим тип исходного ДУ:

$$y' = \underbrace{\frac{-tg(x)}{2}}_{a(x)} \cdot y + \underbrace{\frac{\cos(x)}{2}}_{b(x)} \cdot \frac{1}{y}$$ - это ДУ Бернулли при $n = -1$

$$y' \cdot y = -\frac{tg(x)}{2} \cdot y^2 + \frac{\cos(x)}{2}$$

Вводим замену: $z = \dfrac{1}{y^{-1-1}} = y^2$, тогда $z' = 2y \cdot y' \quad \to \quad y' = \dfrac{z'}{2y}$

Подставляем полученные выражения в ДУ из п. 2)

$$\frac{z'}{2y} \cdot y = -\frac{tg(x)}{2} \cdot z + \frac{\cos(x)}{2}$$

$\underline{z' = -tg(x) \cdot z + \cos(x)}$ - это ЛДУ 1-го порядка

Решаем ЛДУ:

Решаем соответствующее однородное ДУ:

$$z' = -\mathrm{tg}(x) \cdot z$$
$$\frac{dz}{dx} = -\mathrm{tg}(x) \cdot z$$
$$\frac{dz}{z} = -\mathrm{tg}(x)dx$$
$$\int \frac{dz}{z} = \int -\,\mathrm{tg}(x)dx$$
$$\ln|z| = \ln|\cos(x)| + \ln C$$
$$z = C \cdot \cos(x)$$

В полученном решении заменяем произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$$z = C(x) \cdot \cos(x)$$

Подставляем полученное решение в ЛДУ:

$$(C(x) \cdot \cos(x))' = -\mathrm{tg}(x) \cdot C(x) \cdot \cos(x) + \cos(x)$$
$$C'(x) \cdot \cos(x) - C(x) \cdot \sin(x) = -\mathrm{tg}(x) \cdot C(x) \cdot \cos(x) + \cos(x)$$
$$C'(x) \cdot \cos(x) - C(x) \cdot \sin(x) = -\sin(x) \cdot C(x) + \cos(x)$$
$$C'(x) \cdot \cos(x) = \cos(x)$$
$$C'(x) = 1$$

Находим неизвестную функцию:

$$C'(x) = \int 1 \cdot dx = x + \hat{C}$$

Подставляем найденное выражениу в решение:

$$z = (x + C) \cdot \cos(x)$$

Делаем обратную замену: $y^2 = (x + C) \cdot \cos(x)$

Проверяем потеряные решения:

$y = 0$ - не решение (противоречит условию)

$\cos(x) = 0$ - не решение (противоречит условию)

Ответ: $\boxed{y^2 = (x + C) \cdot \cos(x)}$

Уравнение б).

Дано: $(2y \cdot \cos(x) + x^2)dy = (y^2 \cdot \sin(x) - 2x \cdot y)dx$
Определить тип и найти общее решение ДУ.
Решение:

Определим тип исходного ДУ.

Проверим является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах:

$$\underbrace{(-y^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(2y \cdot \cos(x) + x^2)}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \cdot \sin(x) + 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y \cdot \sin(x) + 2x$$

Т.к. $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ ДУ является уравнением в полных дифференциалах.

Будем искать решение в виде: $F(x, y) = C$, где $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$, а $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$

Проинтегрируем $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ по y:

$$F(x, y) = \int (2y \cdot \cos(x) + x^2)dy = 2 \cdot \cos(x)\int y\,dy + x^2 \int 1 \cdot dy = \cos(x) \cdot y^2 + x^2 \cdot y + C(x)$$

$$F(x, y) = \cos(x) \cdot y^2 + x^2 \cdot y + C(x)$$

Продифференцируем найденное выражение по x и приравняем M(x,y):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left[-\sin(x) \cdot y^2 + 2x \cdot y + C'(x) = -y^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot y\right] = M(x, y)$$

Следовательно: $C'(x) = 0$

$$C(x) = \int 0 \cdot dx = \hat{C}$$

Запишем найденную функцию: $F(x, y) = \cos(x) \cdot y^2 + x^2 \cdot y + \hat{C}$

Окончательно: $F(x, y) = C \quad \rightarrow \quad \cos(x) \cdot y^2 + x^2 \cdot y + \hat{C} = C$ или

$$\cos(x) \cdot y^2 + x^2 \cdot y = C$$

Ответ: $\boxed{\cos(x) \cdot y^2 + x^2 \cdot y = C}$