

Лекция № 7

Численное интегрирование дифференциальных уравнений

Поиск общего решения ДУ возможен только для достаточно узкого класса ДУ: это некоторые виды ДУ 1-го порядка, ЛОДУ и ЛНДУ с постоянными коэффициентами и некоторые другие ДУ, решение которых может быть сведено к решению ДУ 1-го порядка.

При решении практических задач поиск общего решения ДУ как правило невозможен, поэтому решение задачи интегрирования ДУ ограничивается поиском так называемых частных решений, удовлетворяющих определенным условиям: задачи Коши и краевые задачи.

Постановка задачи численного интегрирования ДУ 1-го порядка

Дано: $y' = f(x, y)$ - ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной,
 $y(x_0) = y_0$ - начальное условие,

здесь x_0 - начальная точка, y_0 - значение функции в начальной точке.

Требуется: Решить поставленную задачу Коши – найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Метод Эйлера

Выбрав достаточно малый шаг h , построим систему равноотстоящих точек: $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, 1, 2, \dots$

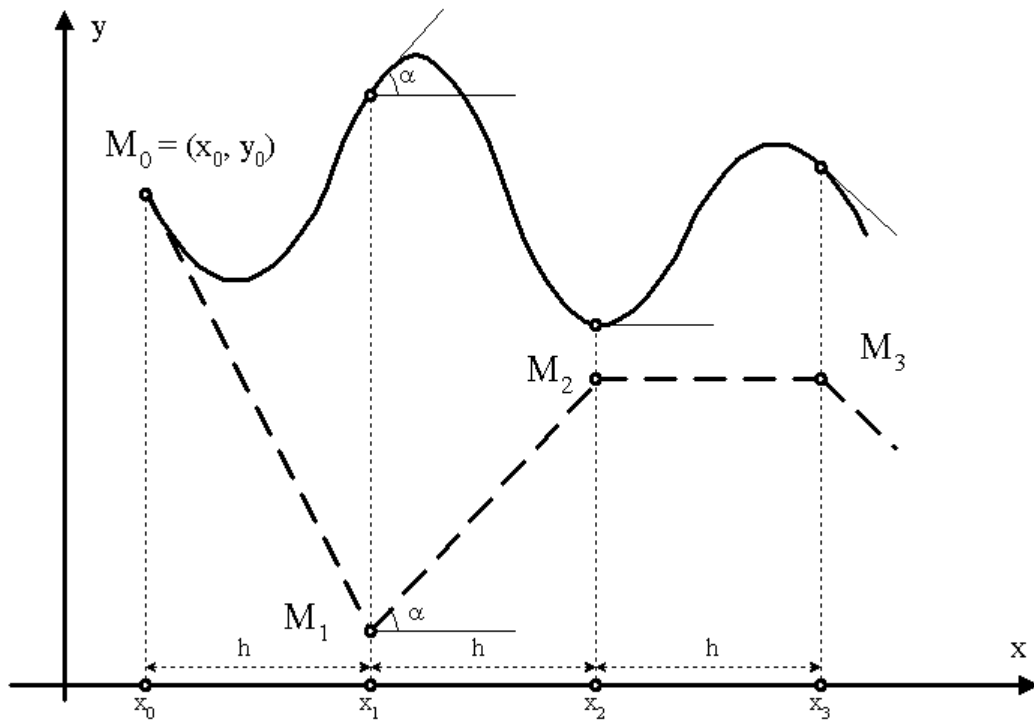
Искомое решение (интегральную кривую) $y = y(x)$, проходящую через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$, приближенно заменим ломанной M_0, M_1, M_2, \dots , звенья которой в каждой вершине имеют направление, совпадающее с направлением интегральной кривой. Тогда

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(x_i) \Rightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Окончательно имеем вычислительную схему для метода Эйлера:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h \\y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i)\end{aligned}$$

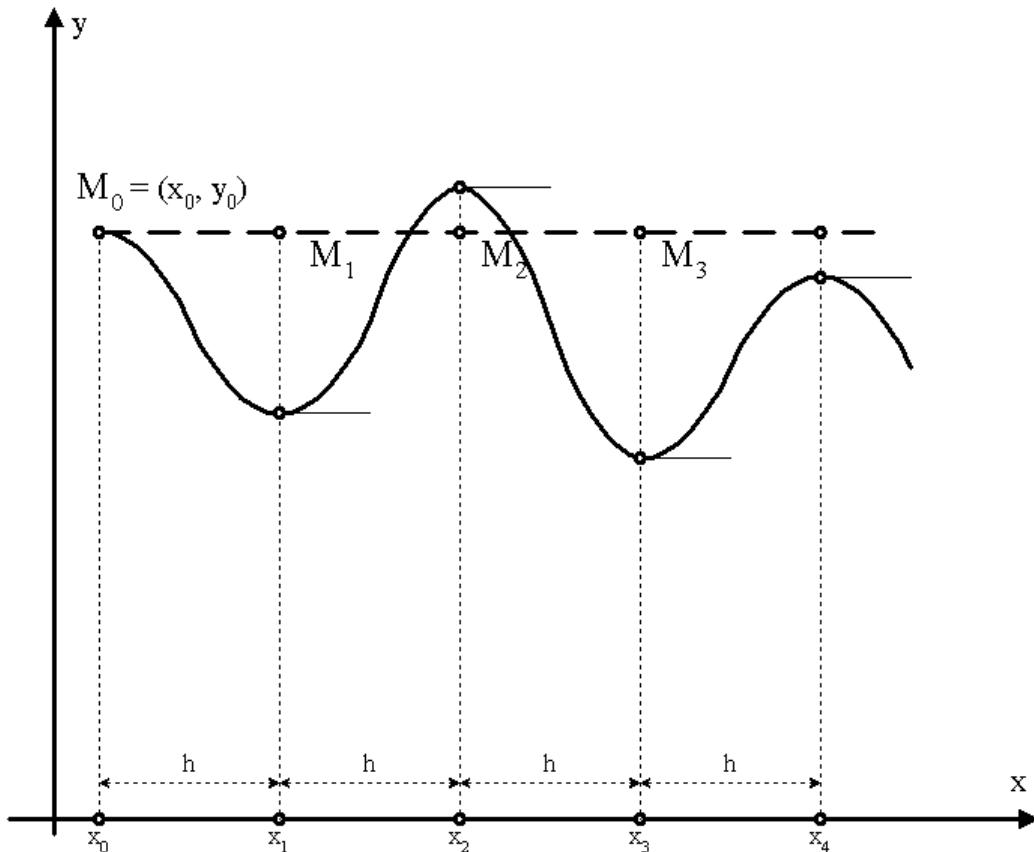
Геометрическая интерпретация метода Эйлера представлена на рисунке:



Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Его недостатками являются:

- 1) малая точность;
- 2) систематическое накопление ошибок.

Недостатки метода Эйлера можно проиллюстрировать следующим примером.



Как видно из рисунка, при неудачном выборе шага h , метод Эйлера заменяет интегральную кривую прямой.

Метод Эйлера дает сравнительно удовлетворительные результаты (в смысле погрешности) лишь при малых значениях h , поскольку, по существу метод Эйлера заключается в том, что интеграл дифференциального уравнения на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представляется двумя членами ряда Тейлора:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. для этого отрезка имеется погрешность порядка h^2 .

Модификации метода Эйлера

Более усовершенствованным является метод Эйлера с пересчетом, при котором сначала вычисляют промежуточные значения:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$$

и находят значение направления поля интегральных кривых в средней точке:

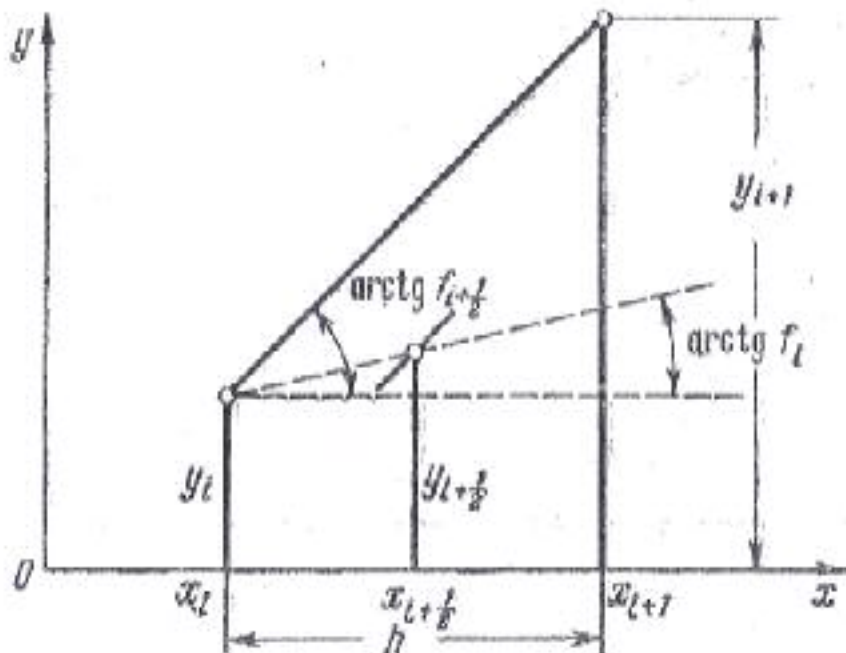
$$f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}),$$

Затем полагают:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_{i+\frac{1}{2}}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера представлена на рисунке:



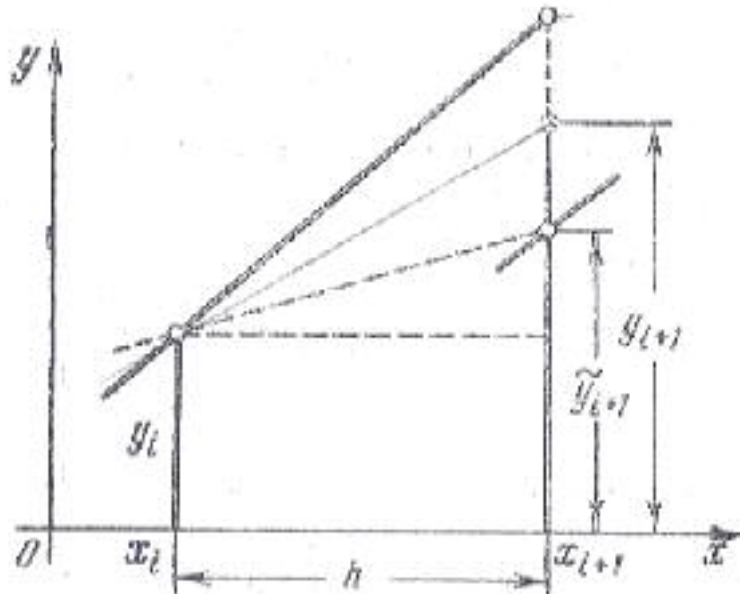
Другой модификацией метода является метод Эйлера-Коши, при котором сначала определяют «грубое приближение» решения: $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, исходя из которого находится направление поля интегральных кривых $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$.

Затем приближенно полагают:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{(f(x_i, y_i) + \tilde{f}_{i+1})}{2}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера представлена на рисунке:



Погрешность модификаций метода Эйлера на каждом шаге есть величина порядка h^3 .

Метод Рунге-Кутты

Согласно методу последовательные значения искомого функции определяются по формуле:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \cdot (k_1^{(i)} + 2 \cdot k_2^{(i)} + 2 \cdot k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \qquad k_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$$

Можно доказать, что погрешность этого метода на каждом шаге есть величина порядка h^5 .

Метод Рунге-Кутты обладает значительной точностью, и, несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении дифференциальных уравнений с помощью вычислительной техники.