Лекция № 6

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛОДУ)

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛОДУ) n-го порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Здесь рассматриваются неизвестные функции $x_1(t),\quad x_2(t)\ldots.x_n(t)$ независимой пременной t.

$\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt},\quad i = 1..n$ - производный неизвестных функций $x_1(t),\quad x_2(t)\ldots.x_n(t)$

Часто при записи СЛОДУ используют неизвестные функции: $x(t),\quad y(t),\quad z(t),\quad u(t)$ и т.д.

Если порядок n СЛОДУ невысокий, решение может быть найдено методом сведения системы n-го порядка к ЛОДУ n-го порядка (метод исключения). Рассмотрим метод на примере.

Пример 1.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$

Решение:

Выразим из второго уравнения функцию x: $\quad x = \dot{y} - 4y$

Найдем производную функции x: $\quad \dot{x} = \ddot{y} - 4\dot{y}$

Подставим полученные выражения в первое уравнение: $\quad \ddot{y} - 4\dot{y} = 2(\dot{y} - 4y) + 3y$

Получим ЛОДУ 2-го порядка: $\quad \ddot{y} - 6\dot{y} + 5y = 0$

Решаем полученное ЛОДУ

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ - характеристическое уравнение.

Решаем уравнение:

$D = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16$

$\lambda_1 = \dfrac{6 - \sqrt{16}}{2} = 1 \qquad \lambda_2 = \dfrac{6 + \sqrt{16}}{2} = 5$

Корни характеристического уравнения – простые, действительные.

Записываем решение ЛОДУ: $y = C_1e^t + C_2e^{5t}$

Для нахождения функции $x = \dot{y} - 4y$, найдем производную $\dot{y} = C_1e^t + 5C_2e^{5t}$, тогда:

$$x = \underbrace{C_1e^t + 5C_2e^{5t}}_{\dot{y}} - 4\underbrace{(C_1e^t + C_2e^{5t})}_{y} = -3C_1e^t + C_2e^{5t}$$

Окончательно: $\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$

Метод Эйлера решения СЛОДУ с постоянными коэффициентами

Алгоритм решения

1. Составить матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$

2. Составить характеристическое (ХУ) уравнение: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ и найти все его n корней: $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n$.
Корни характеристического уравнения – это собственные значения матрицы A.

3. Проанализировать корни $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n$:

<u>Для каждого простого действительного корня</u> λ_j:

3.1. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.2. Найти собственный вектор матрицы V_j, соответсвующий корню λ_j, решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

Замечание !

V_j - любой ***ненулевой*** вектор, удовлетворяющий матричному уравнению $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

3.3. Записать частное решение системы в векторной форме: $C_j V_j \cdot e^{\lambda_j t}$

<u>Для каждого пары простых комплексно-сопряженных корней</u> $\lambda_{j,\, j+1} = \alpha \pm i\,\beta$:

3.1. Выбрать любой из двух корней, либо $\lambda_j = \alpha - i\,\beta$, либо $\lambda_j = \alpha + i\,\beta$

3.2. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.3. Найти собственный вектор матрицы V_j, соответсвующий корню λ_j, решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

3.4. Если был выбран корень $\lambda_j = \alpha - i\,\beta$, рассмотреть произведение:

$$P = V_j \cdot e^{(\alpha - i\,\beta)t} = V_j \cdot [\cos(\beta t) - i \cdot \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

Если был выбран корень $\lambda_j = \alpha + i\,\beta$, рассмотреть произведение:

$$P = V_j \cdot e^{(\alpha + i\,\beta)t} = V_j \cdot [\cos(\beta t) + i \cdot \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

Выделить в полученном произведении действительную $\mathrm{Re}(P)$ и мнимую $\mathrm{Im}(P)$ части.

3.5. Записать частное решение системы в векторной форме: $C_j\,\mathrm{Re}(P) + C_{j+1}\,\mathrm{Im}(P)$

Для каждого кратного действительного корня λ_j кратности k:

3.1. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.2. Найти все линейно-независимые собственные векторы, соответсвующий корню λ_j, решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j^m = 0$.

Если их количество m равно кратности корня k, то записать частное решение системы:
$C_j V_j^1 \cdot e^{\lambda_j t} + C_{j+1} V_j^2 \cdot e^{\lambda_j t} + ... + C_{j+k-1} V_j^k \cdot e^{\lambda_j t}$.

Если количество линейно-независимых собственных векторов $m < k$ перейти к п. 3.3-3.6.

3.3. Записать частные решения системы в виде:

$$\begin{cases} x_1 = (a + b \cdot t + c \cdot t^2 + ... + d \cdot t^{k-m}) \cdot e^{\lambda_j t} \\ .... \\ x_n = (p + q \cdot t + r \cdot t^2 + ... + s \cdot t^{k-m}) \cdot e^{\lambda_j t} \end{cases}$$

3.4. Найти соотношения для коэффициентов $a, b, c......r, s$ методом неопределенных коэффициентов.

3.5. Положить любые k коэффициентов равными произвольным постоянным $C_j, C_{j+1}.....C_{j+k-1}$, выразить оставшиеся из соотношений 3.4.

3.6. Окончательно записать частное решение системы.

4. Записать общее решение СЛОДУ в виде суммы всех частных.

Примеры. Решить СЛОДУ методом Эйлера

№2 Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{5 \cdot t} \\ y = C_1 \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{5 \cdot t} \end{cases}$

№3 Дано: $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} x = -C_1 \sin(3t) \cdot e^t + C_2 \cos(3t) \cdot e^t \\ y = C_1 \cos(3t) \cdot e^t + C_2 \sin(3t) \cdot e^t \end{cases}$

№4 Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \end{cases}$