

Лекция № 6

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛОДУ)

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛОДУ) n -го порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Здесь рассматриваются неизвестные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$... $x_n(t)$ независимой переменной t .

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1..n - \text{производный неизвестных функций } x_1(t), \quad x_2(t) \dots x_n(t)$$

Часто при записи СЛОДУ используют неизвестные функции: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$ и т.д.

Если порядок n СЛОДУ невысокий, решение может быть найдено методом сведения системы n -го порядка к ЛОДУ n -го порядка (метод исключения). Рассмотрим метод на примере.

Пример 1.

Дано:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$$

Решение:

Выразим из второго уравнения функцию x : $x = \dot{y} - 4y$

Найдем производную функции x : $\dot{x} = \ddot{y} - 4\dot{y}$

Подставим полученные выражения в первое уравнение: $\ddot{y} - 4\dot{y} = 2(\dot{y} - 4y) + 3y$

Получим ЛОДУ 2-го порядка: $\ddot{y} - 6\dot{y} + 5y = 0$

Решаем полученное ЛОДУ

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ - характеристическое уравнение.

Решаем уравнение:

$D = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16$

$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = 1$ $\lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} = 5$

Корни характеристического уравнения – простые, действительные.

Записываем решение ЛОДУ: $y = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$

Для нахождения функции $x = \dot{y} - 4y$, найдем производную $\dot{y} = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}$, тогда:

$$x = \underbrace{C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}}_{\dot{y}} - 4 \underbrace{(C_1 e^t + C_2 e^{5t})}_y = -3C_1 e^t + C_2 e^{5t}$$

$$\text{Окончательно: } \begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

Метод Эйлера решения СЛОДУ с постоянными коэффициентами

Алгоритм решения

1. Составить матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

2. Составить характеристическое (ХУ) уравнение: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ и найти все его n корней: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
Корни характеристического уравнения – это собственные значения матрицы A .

3. Проанализировать корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

Для каждого простого действительного корня λ_j :

3.1. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.2. Найти собственный вектор матрицы V_j , соответствующий корню λ_j , решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

Замечание !

V_j - любой **ненулевой** вектор, удовлетворяющий матричному уравнению $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

3.3. Записать частное решение системы в векторной форме: $C_j V_j \cdot e^{\lambda_j t}$

Для каждой пары простых комплексно-сопряженных корней $\lambda_{j, j+1} = \alpha \pm i \beta$:

3.1. Выбрать любой из двух корней, либо $\lambda_j = \alpha - i \beta$, либо $\lambda_{j+1} = \alpha + i \beta$

3.2. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.3. Найти собственный вектор матрицы V_j , соответствующий корню λ_j , решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

3.4. Если был выбран корень $\lambda_j = \alpha - i \beta$, рассмотреть произведение:

$$P = V_j \cdot e^{(\alpha - i \beta)t} = V_j \cdot [\cos(\beta t) - i \cdot \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

Если был выбран корень $\lambda_{j+1} = \alpha + i \beta$, рассмотреть произведение:

$$P = V_{j+1} \cdot e^{(\alpha + i \beta)t} = V_{j+1} \cdot [\cos(\beta t) + i \cdot \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

Выделить в полученном произведении действительную $\text{Re}(P)$ и мнимую $\text{Im}(P)$ части.

3.5. Записать частное решение системы в векторной форме: $C_j \text{Re}(P) + C_{j+1} \text{Im}(P)$

Для каждого кратного действительного корня λ_j кратности k :

3.1. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.2. Найти все линейно-независимые собственные векторы, соответствующий корню λ_j , решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j^m = 0$.

Если их количество m равно кратности корня k , то записать частное решение системы:

$$C_j V_j^1 \cdot e^{\lambda_j t} + C_{j+1} V_j^2 \cdot e^{\lambda_j t} + \dots + C_{j+k-1} V_j^k \cdot e^{\lambda_j t}.$$

Если количество линейно-независимых собственных векторов $m < k$ перейти к п. 3.3-3.6.

3.3. Записать частные решения системы в виде:

$$\begin{cases} x_1 = (a + b \cdot t + c \cdot t^2 + \dots + d \cdot t^{k-m}) \cdot e^{\lambda_j t} \\ \dots \\ x_n = (p + q \cdot t + r \cdot t^2 + \dots + s \cdot t^{k-m}) \cdot e^{\lambda_j t} \end{cases}$$

3.4. Найти соотношения для коэффициентов a, b, c, \dots, r, s методом неопределенных коэффициентов.

3.5. Положить любые k коэффициентов равными произвольным постоянным $C_j, C_{j+1}, \dots, C_{j+k-1}$, выразить оставшиеся из соотношений 3.4.

3.6. Окончательно записать частное решение системы.

4. Записать общее решение СЛОДУ в виде суммы всех частных.

Примеры. Решить СЛОДУ методом Эйлера

№2 Дано:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$$

Решение:
$$\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^{1t} + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^{1t} + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

№3 Дано:
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$$

Решение:
$$\begin{cases} x = -C_1 \sin(3t) \cdot e^t + C_2 \cos(3t) \cdot e^t \\ y = C_1 \cos(3t) \cdot e^t + C_2 \sin(3t) \cdot e^t \end{cases}$$

№4 Дано:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$$

Решение:
$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \end{cases}$$