# Лекция № 5

## *Линейные дифференциальные уравнения*

**Определение 1.**
ДУ вида: $p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + .... + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ называется линейным ДУ.
Здесь функции $p_n(x)...p_0(x)$ непрерывны на некотором промежутке $(a, b)$

Если функция $f(x) \neq 0$, то ДУ называется линейным неоднородным, если же $f(x) = 0$, то ДУ линейное однородное.

**Теорема. (о структуре общего решения однородного уравнения)**
Если $y_1(x), y_2(x)...y_n(x)$ - $n$ линейно независимых на промежутке $(a, b)$ частных решения однородного уравнения, то общее решение однородного уравнения представляется в виде:

$$y_{одн}(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x),$$

где $C_1....C_n$ – произвольные постоянные.

**Определение 2.**
Функции $y_1(x), y_2(x)...y_n(x)$ называются линейно независимыми на $(a, b)$, если тождество:
$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ny_n = 0$ выполняется только в случае, когда все $\alpha_1, \alpha_2...\alpha_n$ =0

**Определение 3.**
Совокупность $n$ линейно независимых на промежутке $(a, b)$ решений однородного уравнения называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

**Теорема. (о структуре общего решения неоднородного уравнения)**
Общее решение неоднородного уравнения представляется суммой общего решение соответствующего однородного уравнения $y_{одн}(x)$ и частных решений неоднородного уравнения, соответсвующих неоднородности .

## *Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами (ЛОДУ)*

ДУ имеет вид: $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + .... + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$
где – $a_n, a_{n-1}.....a_1, a_0$ действительные числа

***Алгоритм решения ЛОДУ***

1. Составить характеристическое (ХУ) уравнение (алгебраическое):

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + .... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

2. Найти все $n$ корней характеристического уравнения: $\lambda_1, \lambda_2...\lambda_n$.

3. Найти ФСР для данного ДУ и записать решение в виде:

$$y_{одн}(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x) ,$$

где каждая функция $y_j(x)$ соответствует корню $\lambda_j$.

***Правило построения ФСР (записи слагаемых в решение):***

а) $\lambda_j$ – простой действительный корень ХУ.

***Замечание.*** Корень будет простым, если среди корней встречается единственный раз.

Тогда в решение запишем 1 слагаемое вида: $C_j e^{\lambda_j x}$

б) $\lambda_j$ – кратный действительный корень (кратности k).

***Замечание.*** Корень – кратный. если среди множества корней встречается более 1 раза (k раз).

Тогда в решение запишем k слагаемых вида: $(C_j + C_{j+1}x + C_{j+2}x^2 + ... + C_{j+k-1}x^{k-1}) \cdot e^{\lambda_j x}$

в) $\begin{matrix} \lambda_j = \alpha + i\beta \\ \lambda_{j+1} = \alpha - i\beta \end{matrix}$ – пара простых комплексно-сопряженных корней,

здесь $\alpha$ – действительная часть, $\beta > 0$ - мнимая часть.

***Замечание***. Комплексно-сопряженные корни будут простыми, если корень вида $\lambda_j = \alpha + i\beta$ встречается 1 раз и корень вида $\lambda_j = \alpha - i\beta$ тоже 1 раз.

Тогда в решение запишем 2 слагаемых: $C_j \cos(\beta x) \cdot e^{\alpha x} + C_{j+1} \sin(\beta x) \cdot e^{\alpha x}$

г) $\begin{matrix} \lambda_j = \alpha + i\beta \\ \lambda_{j+1} = \alpha - i\beta \end{matrix}$ – пара кратных комплексно-сопряженных корней (кратности k)

***Замечание.*** Комплексно-сопряженные корни будут кратными, если корень вида $\lambda_j = \alpha + i\beta$ встречается k раз и корень вида $\lambda_j = \alpha - i\beta$ тоже k раз.

Тогда в решение запишем 2k слагаемых:

$$(C_j + C_{j+1}x + C_{j+2}x^2 + ... + C_{j+k-1}x^{k-1}) \cdot \cos(\beta x) e^{\alpha x} +$$
$$(C_m + C_{m+1}x + C_{m+2}x^2 + ... + C_{m+k-1}x^{k-1}) \cdot \sin(\beta x) e^{\alpha x}$$

Примеры: ***Решить ЛОДУ***

***№1*** Дано: $y'' + y' - 2y = 0$

***Решение:*** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

***№2*** Дано: $4y'' + 4y' + y = 0$

Решение: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-1/2x}$

***№3*** Дано: $y'' + 4y' + 5y = 0$

Решение: $y = C_1 \cos x \cdot e^{-2x} + C_2 \sin x \cdot e^{-2x}$

**№4** Дано: $y^{(6)}+18y^{(4)}+81y''=0$

Решение: $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)\cos 3x+(C_5+C_6x)\sin 3x$

## *Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами (ЛНДУ)*

ДУ имеет вид: $a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+....+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)$

где – $a_n, a_{n-1}.....a_1, a_0$ действительные числа

***Алгоритм решение методом вариации произвольных постоянных***

1. Решить ЛОДУ с той же левой частью, записать его общее решение.

$$y_{одн}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)$$

2. В полученном решении заменить произвольные постоянные на неизвестные функции

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+...+C_n(x)y_n(x)$$

3. Составить систему:

$$\begin{cases} C_1'y_1(x)+C_2'y_2(x)+...+C_n'y_n(x)=0 \\ C_1'y_1'(x)+C_2'y_2'(x)+...+C_n'y_n'(x)=0 \\ C_1'y_1''(x)+C_2'y_2''(x)+...+C_n'y_n''(x)=0 \\ ...... \\ C_1'y_1^{(n-1)}(x)+C_2'y_2^{(n-1)}(x)+...+C_n'y_n^{(n-1)}(x)=\dfrac{f(x)}{a_n} \end{cases}$$

Это система алгебраических уравнений, здесь неизвестными являются $C_1', C_2'....C_n'$.

4. Решить систему, найти: $C_1', C_2'....C_n'$.

5. Найти $C_j(x)$, проинтегрировав $C_j'(x)$:

$$C_j(x)=\int C_j'(x)dx+\widetilde{C}_j$$

6. Подставить полученные выражение в решение из п. 2. Получится решение ЛНДУ.

***Примеры:*** Решить ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных

**№5** Дано: $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$

Решение: $y=(-x+C_1)e^{-x}+(\ln|x|+C_2)x\cdot e^{-x}$

**№6** Дано: $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}$

Решение: $y=(-x+C_1)\cos 2x+(0.5\ln|\sin 2x|+C_2)\sin 2x$

В случаях когда правая часть ЛНДУ имеет специальный вид $f(x) = \sum P_m(x) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta x) \\ \text{или} \\ \sin(\beta x) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha x}$ может быть применен метод подбора частного решения.

Рассмотрим подробнее структуру слагаемых правой части ДУ: $P_m(x) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta x) \\ \text{или} \\ \sin(\beta x) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha x}$, здесь

- $P_m(x) = p_o + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + ... + p_m x^m$ - многочлен по целым, неотрицательным степеням $x$ степени $m$.
- $\begin{bmatrix} \cos(\beta x) \\ \text{или} \\ \sin(\beta x) \end{bmatrix}$ - необязательный множитель

***Примеры функций** $f(x)$ **специального вида***:

$\underline{f(x) = 5}$, выделим необходимые сомножители: $f(x) = \underbrace{5}_{=p_o} \cdot \underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1}$

$\underline{f(x) = -x \cdot \cos(3x)}$, выделим необходимые сомножители: $f(x) = \underbrace{-x}_{=p_1 x} \cdot \underbrace{\cos(3x)} \cdot \underbrace{e^{0\cdot x}}_{=1}$

$\underline{f(x) = 6 \cdot e^{3x}}$, выделим необходимые сомножители: $f(x) = \underbrace{6x}_{=p_1 x} \cdot \underbrace{e^{3\cdot x}}$

$\underline{f(x) = (x + 10x^2) \cdot \sin(x) \cdot e^{-2x}}$, выделим необходимые сомножители: $f(x) = \underbrace{(x + 10x^2)}_{=p_1 x + p_2 x^2} \cdot \underbrace{\sin(x)} \cdot \underbrace{e^{-2\cdot x}}$

***Алгоритм решение методом подбора частного решения***

1. Решить ЛОДУ с той же левой частью, записать его общее решение.

$$y_{одн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$$

2. Для каждого слагаемого в правой части уравнения выписать параметры:

$\underline{m}$ - максимальная степень $x$ в многочлене $P_m(x)$, если слагаемое не содержит $x$, то $m = 0$

$\underline{\beta}$ - коэффициент при $x$ в аргументе $\cos(\beta x)$ или $\sin(\beta x)$, если слагаемое не содержит ни $\cos(\beta x)$, ни $\sin(\beta x)$, то $\beta = 0$

$\underline{\alpha}$ - коэффициент при $x$ в аргументе экспоненты, если слагаемое не содержит экспоненты, то $\alpha = 0$.

3. Сгруппировать слагаемые с одинаковыми $\alpha$ и $\beta$, для сформированной группы выписать параметры: максимальное из $m$ и общие $\beta$ и $\alpha$. Каждое из несгруппированных слагаемых представляет собой отдельную группу со своими параметрами.

4. Для каждой выделенной группы записать структуру частного решения по следующему правилу:

а) если $\beta = 0$, то $\boxed{y_{част} = x^s \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}}$, где

$\underline{Q_m(x) = b_k + b_{k+1} \cdot x + b_{k+2} \cdot x^2 + ... + b_{k+m} \cdot x^m}$ -

- многочлен по целым, неотрицательным степеням $x$ степени $m$ в общем виде (начиная с константы и заканчивая $x^m$), здесь $m$ - параметр группы.

$\underline{\alpha}$ - коэффициент при $x$ в аргументе экспоненты является параметром группы

$\underline{s}$ - определяется следующим образом: если величина $(\alpha + i\beta)$, составленная из параметров группы совпадает с корнями $\lambda$ характеристического уравнения из п.1 , то $s$ равняется числу совпадений, если же величина $(\alpha + i\beta)$ среди корней $\lambda$ характеристического уравнения не встречается, то $s = 0$.

б) если $\beta \neq 0$, то $\boxed{y_{част} = x^s \cdot \left[Q_m(x) \cdot \cos(\beta x) + R_m(x) \cdot \sin(\beta x)\right] \cdot e^{\alpha \cdot x}}$, где

$\underline{Q_m(x), \quad R_m(x)}$ -

- многочлены по целым, неотрицательным степеням $x$ степени $m$ в общем виде с разными коэффициентами, здесь $m$ - параметр группы.

$\underline{\alpha}$ - коэффициент при $x$ в аргументе экспоненты является параметром группы

$\underline{\beta}$ - коэффициент при $x$ в аргументе $\cos(\beta x)$ и $\sin(\beta x)$ является параметром группы

$\underline{s}$ - определяется следующим образом: если величина $(\alpha + i\beta)$, составленная из параметров группы совпадает с корнями $\lambda$ характеристического уравнения из п.1 , то $s$ равняется числу совпадений, если же величина $(\alpha + i\beta)$ среди корней $\lambda$ характеристического уравнения не встречается, то $s = 0$.

5. Определить значения неизвестных коэффициентов $b_k$ методом неопределенных коэффициентов:

5.1. Подставить вместо $y$ каждое отдельно найденное частное решение в ДУ, левая часть которого совпадает с исходным, а правая содержит только те слагаемые, для которых записано это частное решение.

5.2. Привести подобные слагаемые в левой и правой частях полученного уравнения.

5.3. Приравнять коэффициенты при одинаковых функциях $x$ в левой и правой частях полученного уравнения. Получится система алгебраических уравнений.

5.4. Решить систему, найти коэфициенты $b_k$.

5.5. Полностью записать частное решение.

6. Записать решение ЛНДУ: $y = y_{одн} + \sum y_{част}$

***Замечание.*** Если задание сформулировано следующим образом «Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения», то выполняются пункты 1-4 и 6 алгоритма, при этом в решении остаются неопределенными коэффициенты $b_k$. Если задание сформулировано как «Решить ЛНДУ методом подбора частного решения», то выполняются все пункты алгоритма.

***Примеры:*** Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения

***№7*** Дано: $y^{IV} + 4y'' = 5x + e^{2x}$

Решение: $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x) + x^2 \cdot (b_o + b_1 x) + b_2 \cdot e^{2x}$

***№8*** Дано: $y'' + 4y = \cos(2x) + 4x^2 - 3x \cdot \sin(2x)$

Решение:

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + x \cdot \left[(b_o + b_1 x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3 x) \cdot \sin(2x)\right] + b_4 + b_5 x + b_6 x^2$$

**Примеры:** Решить ЛНДУ методом подбора частного решения

***№9*** Дано: $y'' + 4y = 4x^2 - x$

Решение: $y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2$